153. *Théorème de Krein-Milman et le Balayage de Mesures dans la Théorie du Potentiel. I*

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1955)

Introduction. L'objet essentiel de ce mémoire est de reconstruire la théorie du balayage de mesures par le moyen d'un beau théorème de MM. Krein-Milman sur points extrémaux.[1] L'idée d'appliquer une méthode topologique à la théorie du potentiel, notamment à celle du balayage fondée par H. Poincaré, a été utilisée intelligemment par M. H. Cartan,[2] dont l'argumentation a été basée sur la méthode de projection orthogonale dans l'espace pré-hilbertien des mesures d'énergie finie. Quelques années plus tard, cette idée a été rapportée et généralisée: en s'appuyant sur la théorie des distribution, dans plusieurs travaux de M. J. Deny.[3]

Néanmoins, à l'autre point de vue le procédé du balayage d'une mesure sur la frontière (ce qui est un cas primitif et classique du balayage, et le cas général sera bien déduit de ceci) se réduit essentiellement à la représentation de cette mesure par la *limite de combinaisons convexes*, ou *l'intégration* sous une bonne définition, *des mesures* qui sont les points extrémaux d'un ensemble convexe engendré par certaines mesures.

Dans la suite, nous ne utilisons alors aucune théorie que le théorème de MM. Krein-Milman et au plus quelques propriétés très élémentaires du potentiel, qui sont répandues aujourd'hui.

§1. **Rappels sur mesures.** Bornons-nous à considérer un espace euclidien à n dimensions $E=E^n$ pour $n\geqq 3$; les notations suivantes sont utilisées:[4]

$\mathfrak{M}(E)$=espace vectoriel topologique des mesures de Radon sur E, espace muni de la *structure uniforme vague*.

$\mathfrak{M}^+(E)$=cône convexe dans $\mathfrak{M}(E)$ formé des mesures positives.

$\mathfrak{M}^1(E)$=sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}(E)$ formé des mesures bornées; pour la topologie de la norme (*topologie ultraforte*), il est un espace de Banach et sa topologie faible est égale à celle induite

1) M. Krein-D. Milman: Studia Math., **9**, 133–138 (1940); voir encore N. Bourbaki: *Espace vectoriel topologique*, Livre **5**, Hermann, Paris (1953).

2) H. Cartan: Ann. Univ. Grenoble, **22**, 221–280 (1946).

3) J. Deny: Ann. l'Inst. Fourier, **3**, 73–101 (1951), et Med. Lund Univ. Mat. Sem., Supplémentband, tillägnat M. Riesz, 47–61 (1952).

4) Dans tout cet article, il ne sera question que d'espaces vectoriels sur le corps réel; quand on parlera d'un espace vectoriel sans préciser son corps des scalaires, il sera sous-entendu que ce corps est réel.

par la topologie vague de $\mathfrak{M}(E)$. Munissant de cette topologie faible, il est le dual topologique à l'espace de Banach $L_\infty(E)$ des fonctions continues (sur E) et tendant vers 0 au point à l'infini.

En remplaçant E par un ouvert ou compact $(\cdot)$ quelconque, nous définirons $\mathfrak{M}(\cdot)$, $\mathfrak{M}^+(\cdot)$, et $\mathfrak{M}^1(\cdot)$ analogiquement à ceux ci-dessus.

Étant donné un domaine compact $\bar{D}$ dans E, avec sa frontière Γ et l'intérieur D, on désignera par $\mathfrak{M}_0^+(D)$ l'ensemble convexe des mesures positives de la norme 1 réparties sur $\bar{D}$: analogiquement, on définit encore $\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$.

Comme $\mathfrak{M}_0^+(D)$ est ultrafortement borné et faiblement fermé dans $\mathfrak{M}^1(E)$, il est vaguement compact.

Nous ferons usage quelquefois des notations: $\mathfrak{M}^*(\cdot)$ = espace des mesures *à support compact* dont le support est contenu dans $(\cdot)$, et $\mathfrak{M}_0^*(D)=\mathfrak{M}^*(D)\cap\mathfrak{M}_0^+(D)$. Notons en passant que $\mathfrak{M}^*(D)$ est vaguement dense dans $\mathfrak{M}(\bar{D})$; en effet; l'application $x\in\bar{D}\to\varepsilon_x$ (la mesure ponctuelle $+1$ placée à $x\in\bar{D}$) est un homéomorphisme de $\bar{D}$ dans $\mathfrak{M}(\bar{D})$, donc toute $\mu\in\mathfrak{M}(\bar{D})$ est vaguement adhérente à l'espace des mesures dont le support est fini et contenu dans D.

§2. **L'espace vectoriel normé H(D).** Nous définissons d'abord:

$H(D)$ = espace vectoriel des potentiel newtoniens des mesures μ de $\mathfrak{M}^*(E-\bar{D})$, c.-à-d., avec le support compact dans $E-\bar{D}$, et continues sur E.[5] $H(D)$ est alors un sous-espace vectoriel normé de $L_\infty(E)$, pour la norme uniform $\|f\|=\sup|f(x)|_{x\in E}$, et toute fonction de $H(D)$ est évidemment harmonique dans D. Nous désignerons par $H^\wedge(D)$ l'espace dual topologique à $H(D)$, espace muni de la topologie de la convergence simple dans $H(D)$.

Or, toute mesure $\mu\in\mathfrak{M}_0^+(D)$ définit un élément $\mu^\wedge\in H(D)$ de telle manière que

$$(2.1)\qquad \mu^\wedge(f)=\int f\,d\mu,\qquad \text{pour toute } f\in H(D):$$

quand μ décrit $\mathfrak{M}_0^+(D)$, l'ensemble de tous les $\mu^\wedge$ est noté $M^\wedge(D)$. Comme $H(D)\subset L_\infty(E)$, l'application $\wedge$ de $\mathfrak{M}_0^+(D)$ sur $M^\wedge(D)$, par $\mu\to\mu^\wedge$ dans (2.1), est uniformément continue, d'où $M^\wedge(D)$ est aussi compact (et convexe). En s'appuyant sur le théorème de MM. Krein-Milman, on en déduit:

Proposition 1. *$M^\wedge(D)$ coïncide avec l'enveloppe fermée convexe de ses points extrémaux dans l'espace vectoriel topologique $H^\wedge(D)$.*

Soient x un point quelconque $(\in E)$ et Σ_x une sphère de centre x, on désignera désormais par λ_x la mesure sphérique uniformément

5) Nous sommes convenus, dans cette Note, de définir le potentiel newtonien U^μ d'une mesure μ comme une fonction $U^\mu(x)=\int_E r^{2-n}(x,y)d\mu(y)$ pour la distance euclidienne $r(x,y)$.

répartie sur Σ_x de masse totale $+1$. Dans la suite, nous faisons usage la convenance suivante: pour tout point y en dehors de Σ_x, on a évidemment $U^{\varepsilon_x}(y)=U^{\lambda_x}(y)$ et donc, quelle que soit la sphère $\Sigma_x \subset (E-\bar{D})$, on a

$$\int U^{\varepsilon_x}\,d\mu=\int U^{\lambda_x}\,d\mu \quad (\text{pour toute } \mu \in \mathfrak{M}_0^+(D)), \tag{2.2}$$

qui est$=\mu^\wedge(U^{\lambda_x})$, U^{λ_x} étant dans $H(D)$.

Proposition 2. *L'ensemble des points extrémaux de $M^\wedge(D)$, noté Ext. $M^\wedge(D)$, est constitué des éléments définis par les mesures ponctuelles de norme 1 ε_x placées dans la frontière Γ, c.-à-d., $\varepsilon_x \in \mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$.*

Démonstration: 1°) Si $\mu \in \mathfrak{M}_0^+(D)$ n'est pas ponctuelle, $\mu^\wedge$ ne peut être extrémal; en effet, supposons le support de $\mu \in Ext.\ M^\wedge(D)$ contienne au moins deux points x_1 et x_2 de $\bar{D}$, alors il existait deux sphères Σ_1 et Σ_2 des centres x_1 et x_2 respectivement telles que leur intersection $\Sigma_1 \frown \Sigma_2$ soit vide. Désignons par μ_1, μ_2, et μ_3 les réstrictions de μ à $\Sigma_1 \frown \bar{D}$, $\Sigma_2 \frown \bar{D}$ et à $\bar{D}-(\Sigma_1 \frown \Sigma_2)$ respectivement et posons $\mu_i^*=\mu_i/\alpha_i$ où $\alpha_i=\|\mu_i\|$ pour $i=1, 2$, et 3; on a alors

$$\mu=\textstyle\sum_{i=1}^3 \alpha_i \mu_i^* \quad \text{et} \quad \mu_i^* \in \mathfrak{M}_0^+(D). \tag{2.3}$$

Considérons ensuite une droite passent x_1 et x_2, dans laquelle prenons un point z tel que $z \in E-\bar{D}$ et que $\rho_1=\min\limits_{t\in\Sigma_1} r(t, z)$ soit $>$ $\rho_2=\max\limits_{s\in\Sigma_2} r(s, z)$; soit encore Σ_z une sphère de centre z telle que $\Sigma_z \subset (E-\bar{D})$, on a d'après (2.2)

$$\mu_1^{*\wedge}(U^{\lambda_z})=\int U^{\lambda_z}\,d\mu_1^*=\int U^{\varepsilon_z}\,d\mu_1^* \leqq \rho_1^{2-n}$$
$$< \rho_2^{2-n} \leqq \int U^{\varepsilon_z}\,d\mu_2^*=\mu_2^{*\wedge}(U^{\lambda_z}),$$

donc $\mu_1^{*\wedge} \neq \mu_2^{*\wedge}$ et $\nu^\wedge=(\alpha_1/(1-\alpha_3))\mu_1^{*\wedge}+(\alpha_2/(1-\alpha_3))\mu_2^{*\wedge}$ est un point intérieure du ségment connectif de $\mu_1^{*\wedge}$ avec $\nu_2^{*\wedge}$ dans $M^\wedge(D)$; enfin $\mu^\wedge=(1-\alpha_3)\nu^\wedge+\alpha_3\mu_3^{*\wedge}$, contrairement à $\mu^\wedge \in Ext.\ M^\wedge(D)$.

2°) Si $x \in D$, $\varepsilon_x^\wedge$ n'est pas extrémal; en effet, tout $f \in H(D)$ étant harmonique dans D, on a $\varepsilon_n^\wedge=\frac{1}{2}(2\lambda_1^\wedge+2\lambda_2^\wedge)$ où chaque λ_i est la restriction de λ_x sur une demi-sphère, couperant $\Sigma_x \subset D$ en deux, $2\lambda_i^\wedge \in M^\wedge(D)$ pour $i=1, 2$; ceci achève la démonstration.

Nous désignerons par Γ_0 le sous-ensemble de Γ de tels points x que $\varepsilon_x^\wedge \in Ext.\ M^\wedge(D)$; c'est l'ensemble des *points-frontières réguliers* comme on le verra plus tard (§ 6).

§ 3. **Construction du balayage.** Conformément à la proposition 1, il en résulte que, étant donné un $\mu^\wedge \in M^\wedge(D)$, il existe pour tout nombre $\varepsilon>0$ et $f_j \in H(D)$ en nombre fini, une combinaison convexe μ_K des $\varepsilon_x^\wedge$, où $x \in \Gamma_0$, telle qu'on ait

$$|\mu^\wedge(f_j)-\mu_K^\wedge(f_j)| < \varepsilon, \quad \text{pour } j=1, 2, \ldots, k. \tag{3.1}$$

Une famille filtrante des $X_\mu(f_1,\dots,f_k;\varepsilon)$, l'ensemble des mesure $\mu_K\in\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$ satisfaisantes à (3.1), définite une basse d'un filtre Φ_μ dans l'ensemble $\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$; comme $\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$ est vaguement compact, un ultrafiltre Φ_0 qui contient Φ_μ converge vers une mesure $\mu_\Gamma\in\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$ vérifiant évidemment

(3.2) $$\mu^\wedge(f)=\int f\,d\mu_\Gamma,\quad \text{quelle que soit } f\in H(D).^{6)}$$

On dit que cette mesure μ_Γ est une *mesure balayée de* μ sur la frontière: on s'en va montrer l'unicité de mesure balayée dans la suite.

Soient x un point quelconque de $E-\bar{D}$ et $\mu\in\mathfrak{M}_0^*(D)$ (de norme 1 et avec son support $\subset D$); en prenant une sphère $\Sigma_x\subset E-\bar{D}$ de centre x, on a d'après (2.2) et (3.2) que $U^\mu(x)=\int U^{\varepsilon_x}d\mu=\mu^\wedge(U^{\lambda_x})=\mu_\Gamma^\wedge(U^{\lambda_x})=\int U^{\varepsilon_x}d\mu_\Gamma=U^{\mu_\Gamma}(x)$. D'ailleurs, comme U^{μ_Γ} est semi-continu inférieurement, on a $U^{\mu_\Gamma}(x)\leqq\underline{\lim}_{y\to x}U^{\mu_\Gamma}(y)=\lim_{y\to x}U^\mu(y)=U^\mu(x)$, où $x\in\Gamma$ et $y\in(E-\bar{D})$, parce que $\mu\in\mathfrak{M}_0^*(D)$. Il résulte de là que U^{μ_Γ} est borné sur E et satisfait à

(3.3) $$U^\mu\geqq U^{\mu_\Gamma}\ \text{partout sur } E,\ \text{pour } \mu\in\mathfrak{M}_0^*(D).^{7)}$$

Lemme. *Soit $\{D_j\}$ une suite des domaines, avec les frontières compactes Γ_j, tels qu'on ait $\bar{D}_{j+1}\subset D_j$ et $\frown_{j=1}^\infty\bar{D}_j=\bar{D}$; désignant par ν_j une mesure balayée de $\nu\in\mathfrak{M}_0^+(D)$ $(\subset\mathfrak{M}_0^+(D_j))$ sur Γ_j pour chaque j, on voit qu'il existe une sous-suite $\{\nu_{j'}\}$ telle que $\nu_{j'}$ converge vaguement vers une mesure ν_Γ^0 balayée de ν sur Γ.*

Comme $\mathfrak{M}_0^+(D_1)$ est vaguement compact, l'existence de $\{\nu_{j'}\}$ qui convergent vers une $\nu_\Gamma^0\in\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$ est évidente. Pour toute $\lambda\in\mathfrak{M}^*(E-\bar{D})$, il existe un j' tel que $\bar{D}_{j'}\cap$(*le support de* λ) soit vide, donc la continuité de l'application $\wedge$ de $\mathfrak{M}_0^+(D_{j'})$ sur $M^\wedge(D_{j'})$ entraîne que $\nu^\wedge(U^\lambda)=\nu_{j'}^\wedge(U^\lambda)$ converge vers $\nu_\Gamma^{0\wedge}(U^\lambda)$; U^λ étant arbitraire dans $H(D)$, ν_Γ^0 est une mesure balayée de ν sur Γ, ce qui prouve le Lemme.

Or, en considérant $\nu_{j'}$ elle-même comme une mesure balayée de $\nu_\Gamma^0\in\mathfrak{M}_0^*(D_{j'})$ sur $\Gamma_{j'}$, on a $\int U^\mu d\nu_{j'}=\int U^{\mu_\Gamma}d\nu_{j'}=\int U^{\nu_{j'}}d\mu_\Gamma\leqq\int U^{\nu_\Gamma^0}d\mu_\Gamma$, quelle que soit $\mu\in\mathfrak{M}_0^+(D)$. D'autre part, le potentiel est inférieurement semi-continu pour la topologie vague de mesures, on a $\int U^{\mu_\Gamma^0}d\mu\leqq\underline{\lim}_{j'\to\infty}\int U^{\nu_{j'}}d\mu$ (μ étant de la norme 1), d'où résulte

6) Par l'autre raisonnement, on peut prouver l'existence d'une μ_Γ, comme suit: l'ensemble $\hat{X}_\mu(f_1,\dots,f_k;\varepsilon)$ des mesures $\nu\in\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$ qui vérifient; $|\mu^\wedge(f_j)-\nu^\wedge(f_j)|\leqq\varepsilon$, est évidemment fermé et non-vide, alors l'intersection $\Pi=\frown\hat{X}(f_1,\dots,f_k;\varepsilon)$, variant $f_j\in H(D)$ et $\varepsilon>0$, est aussi non-vide parce que $\mathfrak{M}_0^+(\Gamma)$ est compact, d'où une $\mu_\Gamma\in\Pi$ existe.

7) En effet, μ_Γ est portée par Γ, sur laquelle $U^{\mu_\Gamma}\leqq U^\mu$, d'où résulte (3.3) en vertu du principe de maximum (cette μ_Γ est évidemment de l'énergie finie).

$$\int U^{\mu}\, d\nu_{\Gamma}^{0} \leqq \int U^{\mu_{\Gamma}}\, d\nu_{\Gamma}^{0}. \tag{3.4}$$

Analogiquement, $\int U^{\nu_{\Gamma}^{0}}\, d\mu_{\Gamma} \leqq \underline{\lim}_{j\to\infty} \int U^{\nu_{j'}}\, d\mu_{\Gamma}$ et $\int U^{\nu_{j'}}\, d\mu_{\Gamma} = \int U^{\mu_{\Gamma}}\, d\nu_{j'} = \int U^{\mu}\, d\nu_{j'} = \int U^{\nu_{j'}}\, d\mu \leqq \int U^{\nu_{\Gamma}^{0}}\, d\mu$ (d'après (3.3)), c.-à-d., $\int U^{\mu_{\Gamma}}\, d\nu_{\Gamma}^{0} \leqq \int U^{\mu}\, d\nu_{\Gamma}^{0}$; combinant avec (3.4), on en conclut:

$$\int U^{\mu}\, d\nu_{\Gamma}^{0} = \int U^{\mu_{\Gamma}}\, d\nu_{\Gamma}^{0}, \qquad \mu \text{ et } \nu \in \mathfrak{M}_0^{+}(D). \tag{3.5}$$

Posons $\nu=\mu$, (3.5) exprime alors que $U^{\mu}=U^{\mu_{\Gamma}}$ et à fortiori $U^{\mu_{\Gamma}}=U^{\mu_{\Gamma}^{0}}$ sur un *noyau de* μ_{Γ}^{0};[8] si μ_{Γ}^{0} est de l'énergie finie (par exemple, il est le cas où $\mu \in \mathfrak{M}_0^{*}(D)$), on en déduit que $U^{\mu_{\Gamma}} \geqq U^{\mu_{\Gamma}^{0}}$ sur E. D'autre part, pour un point x en dehors du support de μ_{Γ}^{0} et appartenant au support μ_{Γ}, on a $U^{\mu_{\Gamma}}(x) \leqq \underline{\lim}_{y\to x} U^{\mu_{\Gamma}}(y) = \lim_{y\to x} U^{\mu_{\Gamma}^{0}}(y) = U^{\mu_{\Gamma}^{0}}(x)$ où $y \in E-D$, ce qui montre que $U^{\mu_{\Gamma}} \leqq U^{\mu_{\Gamma}^{0}}$ sur un *noyau de* μ_{Γ} et donc sur E. Enfin, on obtient $U^{\mu_{\Gamma}} = U^{\mu_{\Gamma}^{0}}$ partout et $\mu_{\Gamma}=\mu_{\Gamma}^{0}$, ce qui établit *l'unicité de la mesure balayée d'une mesure* $\mu \in \mathfrak{M}_0^{+}(D)$ *sur la frontière* Γ (quand la mesure balayée est *de l'énergie finie*).

(*à suivre*)

8) On dit qu'un ensemble A est *noyau d'une mesure* μ si le complément de A est de mesure nulle pour μ; voir H. Cartan: *Loc. cit.* Par contre, le *support d'une mesure* μ est l'intersection des noyaux fermés de μ.