

## 50. Application de la Méthode des Espaces Rangés à la Théorie de l'Intégration. I

Par Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. April 12, 1956)

§ 1. Pour généraliser la notion des espaces métrique (ou distanciés), nous avons introduit les espaces rangés.<sup>1)</sup> Dans cette Note, nous allons montrer comment nous pouvons appliquer cette notion à définir les intégrales.

Pour fixer les idées, considérons les fonctions à valeurs réelles  $y=f(x)$  d'une variable réelle  $x$ , définie sur l'intervalle  $[a, b]=a \leq x \leq b$ , où  $a, b$  sont deux nombres réels quelconques tels que  $a < b$ . Nous disons qu'une fonction à valeurs finies  $f(x)$  est en escalier<sup>2)</sup> s'il existe un nombre fini des points de division  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  tels que

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

et que  $f(x)$  soit constante dans chacun des sous-intervalles ouverts  $a_{i-1} < x < a_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Posons  $f(x) = \alpha_i$  pour  $a_{i-1} < x < a_i$ . La totalité des fonctions en escalier sera désignée par  $\varepsilon$ . Cette classe des fonctions joue le rôle de celle des fonctions élémentaires au sens de M. M. Stone.<sup>3)</sup> En effet, en posant

$$(1) \quad E(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i (a_i - a_{i-1})$$

nous pouvons voir les trois propositions suivantes qu'on peut regarder comme axiomes de l'intégrale.

(I)  $cf, f+g$  et  $|f|$  appartiennent à  $\varepsilon$  dès que  $f, g$  appartiennent à  $\varepsilon$  ( $c$  étant un nombre réel fini quelconque).  $E$  est une opération à valeurs réelles finies définie sur  $\varepsilon$ . On a

$$E(cf) = cE(f), \quad E(f+g) = E(f) + E(g), \quad E(|f|) \geq 0.$$

(II) Si les fonctions  $f_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) et  $f$  appartiennent à  $\varepsilon$  et si l'inégalité  $|f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  a lieu, on a  $E(|f|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} E(|f_n|)$ .

(III) La constante  $f(x)=1$  ( $a \leq x \leq b$ ) appartient à  $\varepsilon$ . M. M. Stone a introduit d'une manière abstraite (en appelant fonction élémentaire toute fonction d'une classe donnée d'avance qui satisfait à trois

1) K. Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets. I et II, Proc. Japan Acad., **30**, 553-556, 912-916 (1954).

2) Voir F. Riesz: C. R. Acad. Sci., Paris, **154**, 641 (1912); F. Riesz et B. Sz. Nagy: Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Budapest, 29 (1952).

3) M. Stone: Notes on integration I, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **34**, 336-342 (1948).

axiomes (I), (II) et un qui est plus général que (III)) la notion de norme dans la classe  $\mathfrak{G}$  des fonctions à valeurs finies ou infinies  $y=f(x)$ ,  $-\infty \leq y \leq +\infty$ ,  $a \leq x \leq b$ ; on peut poser en effet

$$N(f) = \inf(\lambda; \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} E(|f_n|), |f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|)$$

où  $f_n$  sont des fonctions élémentaires et s'il n'existe aucune suite des fonctions élémentaires  $f_n$  telle qu'on ait  $|f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ , on mettra  $N(f) = +\infty$ . Si nous considérons alors la sous-classe  $\mathfrak{F}$  de toutes les fonctions  $f$  de  $\mathfrak{G}$  dont les normes  $N(f)$  sont finies, et si nous identifions  $f, g$  telles qu'on ait  $N(f-g) = 0$ , nous obtenons un espace vectoriel normé. La norme  $N(f-g)$  y joue le rôle de la distance entre deux fonctions  $f, g$  de  $\mathfrak{F}$ . M. M. Stone a démontré que c'est un espace complet de sorte que  $\mathfrak{F}$  soit un espace de Banach.

Enfin, M. M. Stone a considéré la fermeture  $\mathfrak{L}$  de la classe des fonctions élémentaires, les fonctions de  $\mathfrak{L}$  étant appelées "intégrables". Il a remarqué d'ailleurs qu'étant donnée une fonction intégrable  $f$ , il existe une suite des fonctions élémentaires  $f_n$  telle qu'on ait  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  presque partout c. à d. sauf des points d'un ensemble dont la fonction caractéristique est de norme 0.

Dans notre cas special où  $\varepsilon$  est la classe des fonctions élémentaires ayant l'intégrale définie par (1),  $\mathfrak{L}$  est la classe des fonctions sommables au sens de Lebesgue et la notion d'avoir quelque proposition presque partout coïncide avec le fait qu'on a cette proposition pour tous les points sauf d'un ensemble de mesure nulle. Or, le but de cette Note est montrer que, même dans ce cas special, la méthode des espaces rangés nous permet d'élargir la notion de l'intégrale.

Tout d'abord, nous allons introduire dans la classe  $\varepsilon$  une topologie et un rang de sorte que  $\varepsilon$  devienne à la fois un espace uniforme et rangé. Étant données un entier positif ou nul  $\nu$  et un ensemble fermé  $F$  contenu dans l'intervalle  $[a, b]$ , et une fonction en escalier  $f$ , définissons le voisinage  $V(F, \nu; f)$  de la fonction  $f$  comme suit:

Désignons par 0 la fonction qui s'annule identiquement. Pour deux fonctions  $f, g$  quelconques de  $\varepsilon$ ,  $g \in V(F, \nu; f)$  veut dire, comme définition,  $g-f \in V(F, \nu; 0)$ . Il nous suffira donc de définir le voisinage  $V(F, \nu; 0)$ . Le voisinage  $V(F, \nu; 0)$  est la totalité des fonctions en escalier  $g$  qui jouissent de la propriété suivante:  $g$  est une somme de deux fonctions en escalier:

$$g(x) = p(x) + r(x)$$

qui satisfont aux conditions suivantes:

[ 1 ]  $r(x)$  s'annule pour tout  $x$  appartenant à  $F$ ,

[ 2 ] on a 
$$\int_a^b |p(x)| dx < 2^{-\nu}$$

[ 3 ] on a 
$$\left| \int_a^b r(x) dx \right| < 2^{-\nu}.$$

Dorénavant, convenons d'identifier deux fonctions en escalier qui ne diffèrent que sur un nombre fini des points de son domaine de définition. Cela étant, nous pouvons sans peine voir que les voisinages ainsi définis satisfont aux propositions suivantes:

- (1\*) Tout voisinage  $V(F, \nu; 0)$  contient l'élément 0.
- (2\*) Étant donnés deux voisinages arbitraires de 0,  $V(F_1, \nu_1; 0)$  et  $V(F_2, \nu_2; 0)$  il existe des voisinages  $V(F_3, \nu_3; 0)$  tels qu'on ait  $V(F_3, \nu_3; 0) \subseteq V(F_1, \nu_1; 0) \cap V(F_2, \nu_2; 0)$ .
- (3\*) Pour tout voisinage  $V = V(F, \nu; 0)$  de 0, on a  $V^{-1} = V$ .<sup>4)</sup>
- (4\*) Pour tout voisinage  $V = V(F, \nu; 0)$  de 0, il existe des voisinages  $W = V(F', \nu'; 0)$  tels qu'on ait  $W^2 \subseteq V$ .<sup>4)</sup>
- (5\*) Si une fonction en escalier  $f$  n'est pas identiquement 0,<sup>5)</sup> il existe un voisinage  $V(F, \nu; 0)$  de 0 qui ne contient pas la fonction  $f$ .

Ces propositions montrent bien que  $\varepsilon$  est un espace uniforme.<sup>6)</sup>

Pour définir le rang, remarquons d'abord que les voisinages  $V([a, b], \nu; 0)$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) forment une suite monotone et maximale.<sup>7)</sup> Donc, la profondeur de l'espace  $\varepsilon$  est  $\omega_0$ . La classe  $\mathfrak{B}_\nu$  des voisinages de rang  $\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) sera formée, comme définition, de tous les voisinages  $V(F, \nu; f)$ ,  $f \in \varepsilon$  qui satisfont à la condition<sup>8)</sup>

$$\text{mes} \{ [a, b] - F \} < 2^{-\nu}.$$

Alors, nous pouvons voir sans peine que, pour tout voisinage  $V = V(F, \nu; f)$  de  $f$  et pour tout rang  $\mu$ , il existe un voisinage  $U$  de  $f$  de rang supérieur à  $\mu$  et qui est contenu dans  $V$ .

Par conséquent,  $\varepsilon$  est un espace rangé.

§ 2. Nous avons introduit déjà la notion de suites fondamentales dans un espace rangé: une suite monotone décroissante des voisinages

$$v_0(f_0) \supseteq v_1(f_1) \supseteq v_2(f_2) \supseteq \dots \supseteq v_n(f_n) \supseteq \dots$$

est fondamentale, si elle satisfait à deux conditions suivantes:

- (1) le rang  $\gamma_n$  de  $v_n(f_n)$  est monotone croissant;
- (2) on a  $f_{2n} = f_{2n+1}$ , tandis que le rang de  $v_{2n}(f_{2n})$  est inférieur à

4)  $V^{-1}$  désigne l'ensemble de toutes les fonctions  $-f$  telle que  $f \in V$ .  $W^2 = W \cdot W$  désigne l'ensemble de toutes les fonctions  $f = g + h$  telles que  $g \in W$ ,  $h \in W$ .

5) Remarquons que cela signifie, d'après notre supposition, que  $f(x) \neq 0$  dans un sous-intervalle de  $[a, b]$ .

6) Voir A. Weil: Sur les Espaces à Structure Uniforme et sur la Topologie Générale, Paris, 11 (1937).

7) Pour la terminologie concernant à l'espace rangé, voir K. Kunugi: Loc. cit. 1).

8)  $\text{mes } M$  désigne la mesure au sens de Lebesgue de l'ensemble  $M$ .

celle de  $v_{2n+1}(f_{2n+1})$ .

Mais, pour compléter l'espace rangé, nous avons besoin de plus de la notion des collections maximales. Étant données deux suites fondamentales  $u = \{u_n(f_n)\}$ ,  $v = \{v_n(g_n)\}$ , nous disons que  $u, v$  satisfont à la relation  $u \geq v$  lorsque pour tout  $n, n=0, 1, 2, \dots$ , il existe un indice  $m$  tel que  $v_m(g_m) \subseteq u_n(f_n)$ ; une famille  $f^*$  des suites fondamentales s'appelle "collection maximale" lorsqu'elle satisfait à deux conditions suivantes: (1) pour deux suites fondamentales  $\alpha, \beta$  de  $f^*$ , il existe une suite fondamentale  $\gamma$  de  $f^*$  telle qu'on ait à la fois  $\gamma \leq \alpha$  et  $\gamma \leq \beta$ ; (2) il n'existe aucune famille des suites fondamentales qui satisfait à la condition (1) et qui contient  $f^*$  comme sous-famille distincte de  $f^*$ .

Cela posé, nous pouvons démontrer les théorèmes suivants:

**Théorème 1.** Soit  $u = \{u_n(f_n)\}$  une suite fondamentale. Alors,  $f_n = f_n(x)$  tend vers une fonction  $f(x)$  presque partout dans l'intervalle  $[a, b]$ .

**Théorème 2.** Soient  $u = \{u_n(f_n)\}$ ,  $v = \{v_n(g_n)\}$  deux suites fondamentales appartenant à la même collection maximale. Posons

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x).$$

Alors, nous avons presque partout  $f(x) = g(x)$ .

Ainsi, si nous identifions deux fonctions qui ne sont différentes que sur un ensemble de mesure nulle, toute collection maximale  $f^*$  détermine une fonction qu'on peut associer à cette collection maximale. Nous désignons cette fonction par  $J[f^*]$ .

Soit, d'autre part,  $u = \{u_n(f_n)\}$  une suite fondamentale quelconque. Alors

$$\int_a^b f_n(x) dx$$

forment une suite de Cauchy des nombres réels. Donc, nous pouvons poser

$$I[u] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Mais, nous pouvons démontrer de plus que, si deux suites fondamentales  $u = \{u_n(f_n)\}$  et  $v = \{v_n(g_n)\}$  appartiennent à la même collection maximale  $f^*$ , nous avons  $I[u] = I[v]$ ; par suite, nous pouvons écrire

$$I = I[f^*].$$

Enfin, soit  $u = \{u_n(f_n)\} = \{V(F_n, \nu_n; f_n)\}$  une suite fondamentale quelconque. Alors, nous avons d'abord  $\text{mes}(F_{n+1} - F_n) = 0$  pour tout  $n, n=0, 1, 2, \dots$ , et ensuite la fonction-limite  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  (qui est définie partout à un ensemble de mesure nulle près) est sommable sur tout ensemble  $F_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ). En effet, nous avons

$$\int_{F_m} |f(x) - f_n(x)| dx \leq 2^{-\nu_n+1} \text{ et par suite } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_m} f_n(x) dx = \int_{F_m} f(x) dx.$$

Ensuite, considérons une propriété suivante de la suite fondamentale  $u = \{V(F_n, \nu_n; f_n)\}$  — elle sera appelée “propriété  $P$ ” dans la suite:

( $P$ ) Posons, pour  $n' > n$  ( $n, n' = 0, 1, 2, \dots$ ),

$$f_{n'}(x) - f_n(x) = r_{n,n'}(x) + p_{n,n'}(x)$$

où  $r_{n,n'}(x), p_{n,n'}(x)$  sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2], [3] de § 1; alors, il existe une fonction  $\phi(n)$  de  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) qui jouit des conditions suivantes:

(1)  $\phi(n) > 0$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = 0$ ;

(3) pour tout ensemble  $E$  contenu dans l'intervalle  $[a, b]$  et dont la mesure est inférieure à celle de  $[a, b] - F_n$ , on a

$$\int_E |f_n(x)| dx \leq \phi(n).$$

Alors, nous pouvons démontrer le

**Théorème 3.** *Toute suite fondamentale qui jouit de la propriété  $P$  permet de définir le nombre  $I[u]$  comme une limite d'une suite des intégrales lebesguiennes:*

$$I[u] = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{F_m} f(x) dx, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Nous dirons encore qu'une suite fondamentale jouit de la propriété  $P^*$  si elle satisfait, outre qu'elle jouit de la propriété  $P$ , à la condition:

(4) il existe un entier positif  $k, k \geq 2$  (indépendante de  $n$ ) qui satisfait, pour tout  $n, n = 0, 1, 2, \dots$ , à l'inégalité:

$$k \text{ mes}\{[a, b] - F_{n+1}\} \geq \text{mes}\{[a, b] - F_n\}.$$

Désignons par  $G$  l'ensemble de toutes les collections maximales  $g^*$  qui contiennent au moins une suite fondamentale jouissant de la propriété  $P^*$ . Nous pouvons démontrer alors le

**Théorème 4.** *Dans la classe  $G$ , les fonctions  $J[g^*]$  ( $g^* \in G$ ) forment un ensemble vectoriel:*

1) soient  $\{V(F_n^1, \nu_n^1; f_n)\}$  et  $\{V(F_m^2, \nu_m^2; g_m)\}$  deux suites fondamentales qui jouissent de la propriété  $P^*$ ; alors, nous pouvons choisir deux suites partielles

$$\{V(F_{n_i}^1, \nu_{n_i}^1; f_{n_i})\} \quad \text{et} \quad \{V(F_{m_i}^2, \nu_{m_i}^2; g_{m_i})\}$$

telles que  $\{V(F_{n_i}^1 \cap F_{m_i}^2, \mu_i; f_{n_i} + g_{m_i})\}, \mu_i = \min(\nu_{n_i}^1, \nu_{m_i}^2) - 2$  soit une suite fondamentale jouissant de la propriété  $P^*$ ;

2) soient  $\{V(F_n, \nu_n; f_n)\}$  une suite fondamentale jouissant de la propriété  $P^*$  et  $c$  une constante réelle; choisissons un entier positif  $l$  tel qu'on ait  $|c| < l$ ; alors, il existe un indice  $n_0$  tel qu'en posant  $\mu_n = \nu_n - l$ ,

$$\{V(F_n, \mu_n; cf_{n+n_0})\}$$

soit une suite fondamentale jouissant de la propriété  $P^*$ .

Le Théorème 4 combiné avec le Théorème 3 montre bien que, dans la classe  $G$ , le nombre  $I[g^*]$  est déterminé non seulement par  $g^*$  mais encore par la fonction  $J[g^*]$ . En effet, s'il existe deux collections maximales  $f^*$  et  $g^*$  qui donnent la même fonction-limite  $f(x)=g(x)$  et dont on a  $I[f^*] \neq I[g^*]$ , nous n'avons qu'à appliquer l'opération  $f(x)-g(x)=0$ , ce qui est légitime d'après le Théorème 4; le Théorème 3 montre bien que c'est une contradiction. En posant  $J[g^*]=f(x)$ , nous pouvons donc écrire

$$I[g^*] = \int_a^b f(x) dx.$$

Ainsi, nous avons une nouvelle définition de l'intégrale. La théorie de l'intégration que nous avons développée jusqu'ici nous permet de généraliser pour qu'elle s'applique aux fonctions définies dans les espaces abstraits où l'on peut parler de la mesure des ensembles — mesure de Haar, par exemple.<sup>9)</sup>

Mais, la méthode de changement de la variable nous permet élargir encore la portée de l'intégration; elle sera discutée dans la note prochaine.

---

9) Quant à la mesure de Haar. voir p. ex. P. R. Halmos: *Mesure Theory*, New York, 251 (1950).