4. L'Intégrale de Denjoy et l'Intégration au Moyen des Espaces Rangés. II

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1957)

Continuons la démonstration du Théorème 4 de la Note I.[1] Pour cela, remarquons d'abord que, si I_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$ est un système élémentaire tel que $I_i \cap F^*_{2n+1} \neq 0$ pour tout i, on a $\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} r_{2n+1}(x)dx\right| < 2^{-(2n+2)}$

En effet, puisque $F^*_{2n+1}=F_n$, on a $I_i \cap F_n \neq 0$ pour tout i. On a donc, selon 3), $\sum_{i=1}^{i_0}\left|(D)\int_{I_i} f(x)\,dx - \int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\right| < 2^{-(2n+4)}$ Puisque F_n est contenu dans F_{n+1}, on a $I_i \cap F_{n+1} \neq 0$ pour tout i. On a donc $\sum_{i=1}^{i_0}\left|(D)\int_{I_i} f(x)\,dx - \int_{I_i\cap F_{n+1}} f(x)\,dx\right| < 2^{-(2(n+1)+4)}$ Conséquemment, il en résulte que $\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} t_{n+1}(x)\,dx\right| = \sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i\cap(F_{n+1}-F_n)} f(x)\,dx\right| = \sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i\cap F_{n+1}} f(x)\,dx - \int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\right| < 2^{-(2n+4)} + 2^{-(2n+6)} < 2^{-(2n+3)}$ Donc, $\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} r_{2n+1}(x)\,dx\right| = \sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} t^{n+1}_{n+1}(x)\,dx\right| \leq \sum_{i=1}^{i_0}\int_a^b\left|t_{n+1}(x)-t^{n+1}_{n+1}(x)\right|dx + \sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} t_{n+1}(x)dx\right| < 2^{-((n+1)+2(n+1)+4)} + 2^{-(2n+3)} < 2^{-(2n+2)}$

Observons maintenant que la suite $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F^*_n, \nu_n; f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ est une suite fondamentale qui jouit de la propriété P'. D'abord, nous allons montrer que la suite u est monotone décroissante. Il est facile de voir qu'on a $V(F^*_{2n}, \nu_{2n}; f_{2n}) \supseteq V(F^*_{2n+1}, \nu_{2n+1}; f_{2n+1})$. Il suffit donc de voir qu'on a $V(F^*_{2n}, \nu_{2n+1}; f_{2n}) \supseteq V(F^*_{2n+2}, \nu_{2n+2}; f_{2n+2})$. Soit $g(x)$ une fonction quelconque dans $V(F^*_{2n+2}, \nu_{2n+2}; f_{2n+2})$. Alors, la fonction $g(x)$ s'écrit $f_{2n+2}(x)+p(x)+r(x)$, où $p(x)$, $r(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3]. Puisque la fonction $f_{2n+2}(x)$ s'écrit $f_{2n+1}(x)+p_{2n+1}(x)+r_{2n+1}(x)$, $g(x)$ peut s'écrire de plus $f_{2n+1}(x)+(p(x)+p_{2n+1}(x))+(r(x)+r_{2n+1}(x))$. Mais, on voit de plus que $p(x)+p_{2n+1}(x)$ et $r(x)+r_{2n+1}(x)$ possèdent les propriétés suivantes: [1] $r(x)$ s'annule pour tout $x\in F^*_{2n+1}$ puisque $F^*_{2n+1}\subseteq F^*_{2n+2}$. $r_{2n+1}(x)$ s'annule pour tout $x\in F^*_{2n+1}$ puisque $r_{2n+1}(x)=t^{n+1}_{n+1}(x)$. Par suite, $r(x)+r_{2n+1}(x)$ s'annule pour tout $x\in F^*_{2n+1}$; [2] On a, pour tout $n=1,2,\cdots$, $\int_a^b |p_{2n+1}(x)|\,dx \leq \int_a^b |s_{n+1}(x)-s_n(x)|\,dx + \sum_{m=1}^{n}\int_a^b |t^m_{n+1}(x)-t^m_n(x)|\,dx$

1) Shizu Nakanishi: L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. I, Proc. Japan Acad., **32**, 678–683 (1956).

$\leq \int_a^b |s_{n+1}(x)-s(x)|\,dx+\int_a^b |s(x)-s_n(x)|\,dx+\sum_{m=1}^{n}\int_a^b |t_{n+1}^m(x)-t_m(x)|\,dx$
$+\sum_{m=1}^{n}\int_a^b |t_m(x)-t_n^m(x)|\,dx<2^{-(2(n+1)+4)}+2^{-(2n+4)}+\sum_{m=1}^{n}2^{-(m+2(n+1)+4)}$
$+\sum_{m=1}^{n}2^{-(m+2n+4)}<2(2^{-(2(n+1)+4)}+2^{-(2n+4)})<2^{-(2n+2)}$ Pour $n=0$, on a de même $\int_a^b |p_1(x)|\,dx<2^{-2}$ Donc, pour tout $n=0,1,2,\cdots$, $\int_a^b |p(x)+p_{2n+1}(x)|\,dx<2^{-\nu_{2n+2}}+2^{-(2n+2)}=2^{-\nu_{2n+1}}$; [3] Nous avons déjà vu plus haut qu'on a $\left|\int_a^b r_{2n+1}(x)\,dx\right|<2^{-(2n+2)}$ puisque $[a,b]\cap F_{2n+1}^*\neq 0$. Donc, $\left|\int_a^b (r(x)+r_{2n+1}(x))\,dx\right|<2^{-\nu_{2n+2}}+2^{-(2n+2)}=2^{-(2n+1)}$ Donc, on a $g(x)\in V(F_{2n+1}^*, \nu_{2n+1}; f_{2n+1})$

On a selon 5) mes $(CF_{2n+1}^*)=$mes $(CF_n)<2^{-(2n+1)}$, et on a de même mes $(CF_{2n}^*)<2^{-2n}$ Donc, $V(F_n^*, \nu_n; f_n)$ est un voisinage de rang $\nu_n=n$. Par conséquent, la suite u' est fondamentale.

Ensuite, montrons que la suite fondamentale u' jouit de la propriété P'. Les propriétés [1], [2] et [3] ont été déjà vues plus haut. α.1) On a, pour tout $n=2,3,\cdots$, $\sum_{j=0}^{2n}\int_{CF_{2n+1}^*} |p_j(x)|\,dx=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{CF_n} |p_{2j+1}(x)|\,dx$
$=\int_{CF_n} |p_1(x)|\,dx+\sum_{j=1}^{n-1}\int_{CF_n} |p_{2j+1}(x)|\,dx\leq \int_{CF_n} |s_1(x)-s_0(x)|\,dx+\sum_{j=1}^{n-1}\int_{CF_n} |s_{j+1}(x)$
$-s_j(x)|\,dx+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{j}\int_{CF_n} |t_{j+1}^m(x)-t_j^m(x)|\,dx\leq\sum_{j=0}^{n-1}\int_{CF_n} |s_{j+1}(x)|\,dx+\sum_{j=0}^{n-1}\int_{CF_n} |s_j(x)|dx$
$+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{j}\int_{CF_n} |t_{j+1}^m(x)|\,dx+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{j}\int_{CF_n} |t_j^m(x)|\,dx\leq 2\Big(\sum_{j=0}^{n}\int_{CF_n} |s_j(x)|\,dx$
$+\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\int_{CF_n} |t_j^m(x)|\,dx\Big)<2^{-(2(n-1)+4)}\times 2=2^{-(2n+1)}=2^{-\nu_{2n+1}}$ Pour $n=1$, on a de même la propriété α.1). Pour tout $n=1,2,\cdots$, on a $\sum_{j=0}^{2n-1}\int_{CF_{2n}^*} |p_j(x)|\,dx=\sum_{j=0}^{2n}\int_{CF_{2n+1}^*} |p_j(x)|\,dx<2^{-(2n+1)}<2^{-2n}=2^{-\nu_{2n}}$ La propriété α.2) a été déjà vue plus haut. α.3) On a, pour tout $n=2,3,\cdots$, $\sum_{m=0}^{2n}\int_{CF_{2n+1}^*} |r_m(x)|dx=\sum_{m=0}^{n-1}\int_{CF_{2n+1}^*} |r_{2m+1}(x)|dx=\sum_{m=0}^{n-1}\int_{CF_{2n+1}^*} |t_{m+1}^{m+1}(x)|\,dx=\int_{CF_n} |t_n^n(x)|\,dx$
$+\sum_{m=1}^{n-1}\int_{CF_n} |t_m^m(x)|\,dx$. D'autre part, on a selon 4) $\sum_{m=1}^{n-1}\int_{CF_n} |t_m^m(x)|\,dx<2^{-(2n+2)}$, et on a $\int_{CF_n} |t_n^n(x)|\,dx=\int_{CF_n} |t_n(x)-t_n^n(x)|\,dx\leq\int_a^b |t_n(x)-t_n^n(x)|\,dx<2^{-(n+2n+4)}$ Donc, $\sum_{m=0}^{2n}\int_{CF_{2n+1}^*} |r_m(x)|\,dx<2^{-(3n+4)}+2^{-(2n+2)}<2^{-(2n+1)}=2^{-\nu_{2n+1}}$ Pour

$n=1$, on a de même la propriété $\alpha.3$). Pour tout $n=1,2,\cdots$, on a $\sum_{m=1}^{2n-1}\int_{CF_{2n}^*}|r_m(x)|\,dx=\sum_{m=0}^{2n}\int_{CF_{2n+1}^*}|r_m(x)|\,dx<2^{-(2n+1)}<2^{-\nu_{2n}}$ On voit sans peine la propriété β).

Enfin, montrons qu'on a presque partout $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. Pour cela, il suffit de montrer qu'on a presque partout $\lim_{n\to\infty} f_{2n}(x)=f(x)$. Pour tout $x_0\in[a,b]$, il y a un nombre naturel m_0 tel que $x_0\in F_{m_0}$ On a alors $f(x_0)=s(x_0)+\sum_{m=1}^{m_0}t_m(x_0)$. D'autre part, on a $f_{2n}(x)=s_n(x)+\sum_{k=1}^{n}t_n^k(x)$ pour tout $n=1,2,\cdots$. En effet, nous avons, pour $n=1$, $f_2(x)=f_1(x)+p_1(x)+r_1(x)=s_0(x)+(s_1(x)-s_0(x))+t_1'(x)=s_1(x)+t_1'(x)$. Supposons que nous avons déjà vu le résultat voulu pour $n=m-1$ (≥ 1). Nous avons alors $f_{2m}(x)=f_{2m-1}(x)+p_{2m-1}(x)+r_{2m-1}(x)=f_{2(m-1)}(x)+p_{2m-1}(x)+r_{2m-1}(x)=\{s_{m-1}(x)+\sum_{k=1}^{m-1}t_{m-1}^k(x)\}+\{(s_m(x)-s_{m-1}(x))+\sum_{k=1}^{m-1}(t_m^k(x)-t_{m-1}^k(x))\}+t_m^m(x)=s_m(x)+\sum_{k=1}^{m}t_m^k(x)$. Puisque $x_0\in F_{m_0}$, on a, pour tout $n>m_0$, $f_{2n}(x_0)=s_n(x_0)+\sum_{k=1}^{m_0}t_n^k(x_0)$. Conséquemment, il en résulte qu'on a, presque tout x_0, $\lim_{n\to\infty}f_{2n}(x_0)=\lim_{n\to\infty}s_n(x_0)+\sum_{k=1}^{m_0}(\lim_{n\to\infty}t_n^k(x_0))=s(x_0)+\sum_{k=1}^{m_0}t_k(x_0)=f(x_0)$.

Puisque la suite u est une suite fondamentale qui jouit de la propriété P' et qu'on a presque partout $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, on a, en vertu du Théorème 3, $I[u]=(D)\int_a^b f(x)\,dx$.

Lemme 3. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n,\nu_n;f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, *une suite fondamentale qui jouit de la propriété* P'. *Posons* $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. *Alors, pour tout intervalle* J *contenu dans* $[a,b]$, *on a*

$$(D)\int_J f(x)\,dx=\int_J f_0(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_J p_n(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_J r_n(x)\,dx,$$

où $p_n(x)$, $r_n(x)$ *sont des fonctions en escalier satisfaisant à la condition* α).

Démonstration. On a déjà vu dans la démonstration du Théorème 3 que $f(x)$ est intégrable au sens de Denjoy sur tout intervalle J et on a $(D)\int_J f(x)\,dx=\lim_{m\to\infty}\int_{J\cap F_m}f(x)\,dx$. Pour tout F_m, on a $\int_{J\cap F_m}f(x)\,dx=\int_{J\cap F_m}f_0(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{J\cap F_m}p_n(x)\,dx+\sum_{n=0}^{m-1}\int_{J\cap F_m}r_n(x)\,dx$. En effet, si $i>m$, on a $\int_{J\cap F_m}f_i(x)\,dx=\int_{J\cap F_m}f_0(x)\,dx+\sum_{n=0}^{i-1}\int_{J\cap F_m}p_n(x)\,dx+\sum_{n=0}^{m-1}\int_{J\cap F_m}r_n(x)\,dx$ puisque $r_n(x)$ s'annule pour tout $x\in F_m$ quel que soit $n\geq m$. Puisqu'on a déjà vu que $\lim_{i\to\infty}\int_{J\cap F_m}f_i(x)\,dx=\int_{J\cap F_m}f(x)\,dx$, on a de plus $\int_{J\cap F_m}f(x)\,dx=\int_{J\cap F_m}f_0(x)\,dx$

$+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{J\cap F_m} p_n(x)\,dx+\sum_{n=0}^{m-1}\int_{J\cap F_m} r_n(x)\,dx$. En outre, on a selon α.1) et [2]

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\int_J p_n(x)\,dx-\sum_{n=0}^{\infty}\int_{J\cap F_m} p_n(x)\,dx\right|\leq\sum_{n=0}^{m-1}\left|\int_{J-F_m} p_n(x)\,dx\right|+\sum_{n=m}^{\infty}\left|\int_{J-F_m} p_n(x)\,dx\right|$$

$$\leq\sum_{n=0}^{m-1}\int_{CF_m}|p_n(x)|\,dx+\sum_{n=m}^{\infty}\int_a^b|p_n(x)|\,dx<2^{-\nu_m}+\sum_{n=m}^{\infty}2^{-\nu_m}<2^{-(\nu_m-3)}$$

Donc, $\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_{J\cap F_m} p_n(x)\,dx\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_J p_n(x)\,dx$. Si m_0 est un nombre naturel tel que $F_{m_0}\cap J\neq 0$, on a, selon α.2) et α.3), pour tout $m\geq m_0$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\int_J r_n(x)\,dx-\sum_{n=0}^{m-1}\int_{J\cap F_m} r_n(x)\,dx\right|$$

$$\leq\sum_{n=0}^{m-1}\int_{CF_m}|r_n(x)|\,dx+\sum_{n=m}^{\infty}\left|\int_J r_n(x)\,dx\right|<2^{-\nu_m}+\sum_{n=m}^{\infty}2^{-\nu_n}<2^{-(\nu_m-3)}$$

Donc, $\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{m-1}\int_{J\cap F_m} r_n(x)\,dx\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_J r_n(x)dx$. Conséquemment, il s'ensuit que

$$(D)\int_J f(x)\,dx=\lim_{m\to\infty}\int_{J\cap F_m} f(x)\,dx=\int_J f_0(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_J p_n(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_J r_n(x)\,dx.$$

Lemme 4. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n,\nu_n;f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, *une suite fondamentale qui jouit de la propriété* P'. *Posons* $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. *Alors, pour tout* F_n, *si l'un au moins des extrémités de tout intervalle* J_h *appartient à* F_n, *on a*

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left|(D)\int_{J_h} f(x)\,dx\right|<\max_x|f_0(x)|\cdot\mathrm{mes}\left\{\bigcup_{h=1}^{\infty}J_h\right\}+2^{-(\nu_n-3)},$$

quelle que soit la suite des intervalles J_h $(h=1,2,\cdots)$ *n'empiétant pas les uns sur les autres et telle que l'intérieur de tout* J_h *soit contenu dans* CF_n. *De plus, pour tout intervalle* I *contenu dans* $[a,b]$, *on a*

$$(D)\int_I f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}(D)\int_{I\cap I_k} f(x)\,dx+\int_{I\cap F_n} f(x)\,dx,$$

où I_k $(k=1,2,\cdots)$ *est la suite des intervalles contenus dans* $[a,b]$ *contigus à l'ensemble fermé* F_n.

Démonstration. Puisque l'intérieur de tout J_h est contenu dans CF_n, on a, selon α.3), $\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{h=1}^{\infty}\int_{J_h}|r_m(x)|\,dx<2^{-\nu_n}$ Pour tout $m\geq n$, on a $F_m\cap J_h\neq 0$ $(h=1,2,\cdots)$. Par suite, on a, selon α.2), $\sum_{h=1}^{\infty}\left|\int_{J_h} r_m(x)\,dx\right|\leq 2^{-\nu_m}$ pour tout $m\geq n$. Donc, puisque $r_{2i}(x)=0$ et $\nu_{2i+1}<\nu_{2(i+1)+1}$ pour tout i, il s'ensuit que $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left|\int_{J_h} r_m(x)\,dx\right|<2^{-\nu_n}+2^{-(\nu_n-1)}$ On a de même

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left|\int_{J_h} p_m(x)\,dx\right|\leq\sum_{m=0}^{\infty}\int_{CF_n}|p_m(x)|\,dx=\sum_{m=0}^{n-1}\int_{CF_n}|p_m(x)|dx+\sum_{m=n}^{\infty}\int_{CF_n}|p_m(x)|dx$$

$<2^{-\nu_n}+2^{-(\nu_n-1)}$ Donc, en vertu du Lemme 3, on a $\sum_{h=1}^{\infty}\left|(D)\int_{J_h} f(x)\,dx\right|$ $\leq \sum_{h=1}^{\infty}\left|\int_{J_h} f_0(x)\,dx+\sum_{m=0}^{\infty}\int_{J_h} p_m(x)\,dx+\sum_{m=0}^{\infty}\int_{J_h} r_m(x)\,dx\right| \leq \sum_{h=1}^{\infty}\left|\int_{J_h} f_0(x)\,dx\right|+$ $\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\int_{J_h} p_m(x)\,dx\right|+\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\int_{J_h} r_m(x)\,dx\right|<\max_x |f_0(x)|\cdot\mathrm{mes}\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} J_h\right)+2^{-(\nu_n-3)}$

En outre, on voit de même que, si l'on pose $F(J)=(D)\int_J f(x)\,dx$ pour tout intervalle J contenu dans $[a,b]$, $\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{O}(F;\, I\cap I_k)<+\infty$, où $\boldsymbol{O}(F;\, I\cap I_k)$ est l'oscillation de la fonction d'intervalle $F(J)$ sur l'intervalle $I\cap I_k$. Donc, on sait[2] que $(D)\int_I f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}(D)\int_{I\cap I_k} f(x)\,dx+\int_{I\cap F_n} f(x)\,dx.$

Lemme 5. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, *une suite fondamentale qui jouit de la propriété* P'. *Alors, pour toute suite des nombres naturels* $\{m_i;\ i=0,1,2,\cdots\}$ *telle que* $m_i<m_{i+1}$ *et* $\nu_{2m_i+1}<\nu_{2m_i+1}$ *pour tout* i, *la suite des voisinages* u':

$$V(F_{2m_0}, \nu_{2m_0}-1;\ f_{2m_0}),\ V(F_{2m_0+1}, \nu_{2m_0+1}-1;\ f_{2m_0+1}),$$
$$V(F_{2m_1}, \nu_{2m_1}-1;\ f_{2m_1}),\ V(F_{2m_1+1}, \nu_{2m_1+1}-1;\ f_{2m_1+1}),\cdots$$

est une suite fondamentale qui jouit de la propriété P' *et telle qu'on ait à la fois* $u'\leq u$ *et* $u\leq u'$.

Démonstration. Observons d'abord que la suite u' est monotone décroissante. Il est facile de voir que $V(F_{2m_i}, \nu_{2m_i}-1;\ f_{2m_i})\supseteq V(F_{2m_i+1}, \nu_{2m_i+1}-1;\ f_{2m_i+1})$ pour tout i. Soit $g(x)$ une fonction quelconque dans $V(F_{2m_{i+1}}, \nu_{2m_{i+1}}-1;\ f_{2m_{i+1}})$. Alors, la fonction s'écrit $f_{2m_{i+1}}(x)+p(x)+r(x)$, où $p(x)$, $r(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3]. La fonction $f_{2m_{i+1}}(x)$ étant un élément de $V(F_{2m_i+1}, \nu_{2m_i+1};\ f_{2m_i+1})$, elle s'écrit $f_{2m_i+1}(x)+p'(x)+r'(x)$, où $p'(x)$, $r'(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3]. Donc, $g(x)$ peut s'écrire $f_{2m_i+1}(x)+(p(x)+p'(x))+(r(x)+r'(x))$. Mais, on voit de plus que $p(x)+p'(x)$ et $r(x)+r'(x)$ possèdent les propriétés suivantes: [1] $r(x)+r'(x)$ s'annule pour tout $x\in F_{2m_i+1}$ puisque $F_{2m_i+1}\subseteq F_{2m_{i+1}}$; [2] On a $\int_a^b |p(x)+p'(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2m_{i+1}}-1)}+2^{-\nu_{2m_i+1}}$ $\leq 2^{-(\nu_{2m_{i+1}}-1)}$ puisque $\nu_{2m_i+1}\leq\nu_{2m_{i+1}}-1$; [3] On a de même $\left|\int_a^b (r(x)+r'(x))\,dx\right|<2^{-(\nu_{2m_i+1}-1)}$ Donc, on a $g(x)\in V(F_{2m_i+1}, \nu_{2m_i+1}-1;\ f_{2m_i+1})$.

On verra sans peine que la suite monotone décroissante u' est fondamentale.

Ensuite, montrons que la suite fondamentale u' jouit de la propriété P'. Puisque la suite u jouit de la propriété P', on peut poser, pour tout $n=0,1,2,\cdots,f_{n+1}(x)=f_n(x)+p_n(x)+r_n(x)$, où $p_n(x)$, $r_n(x)$ sont

2) Voir S. Saks: Theory of the integral, 257 (1937).

des fonctions en escalier satisfaisant à la condition α). Donc, $f_{2m_{i+1}}(x) = f_{2m_i+1}(x) + \sum_{j=1}^{2(m_{i+1}-m_i)-1} p_{2m_i+j}(x) + \sum_{j=1}^{2(m_{i+1}-m_i)-1} r_{2m_i+j}(x)$ et $f_{2m_i+1}(x) = f_{2m_i}(x)$ pour tout $i=0,1,2,\cdots$. Posons maintenant $p'_{2m_i+1}(x) = \sum_{j=1}^{2(m_{i+1}-m_i)-1} p_{2m_i+j}(x)$, $r'_{2m_i+1}(x) = \sum_{j=1}^{2(m_i-m_{i-1})-1} r_{2m_i+j}(x)$ et $p'_{2m_i}(x) = r'_{2m_i}(x) = 0$ pour tout i. Alors, les fonctions sont des fonctions en escalier satisfaisant à la condition α). En effet, on voit que: [1] $r'_{2m_i+1}(x)$ s'annule pour tout $x \in F_{2m_i+1}$ puisque $F_{2m_i+1} \subseteq F_{2m_i+j}$ $(j \geq 1)$; [2] Puisque $p_{2m}(x)=0$ et $\nu_{2m+1} < \nu_{2(m+1)+1}$, il s'ensuit que $\int_a^b |p'_{2m_i+1}(x)|\,dx \leq \sum_{l=0}^{\infty} \int_a^b |p_{2m_i+2l+1}(x)|\,dx < \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-\nu_{2m_i+2l+1}} \leq 2^{-(\nu_{2m_i+1}-1)}$; [3] De même, on a $\left|\int_a^b r'_{2m_i+1}(x)\,dx\right| < 2^{-(\nu_{2m_i+1}-1)}$; α.1). On a

$$\sum_{t=0}^{i} \int_{CF_{2m_i+1}} |p'_{2m_t}(x)|\,dx + \sum_{t=0}^{i} \int_{CF_{2m_i+1}} |p'_{2m_t+1}(x)|\,dx \leq \sum_{t=0}^{i}\left(\sum_{j=1}^{2(m_{t+1}-m_t)-1} \int_{CF_{2m_i+1}} |p_{2m_t+j}(x)|\,dx\right)$$

$$= \sum_{l=2m_0}^{2m_{i+1}-1} \int_{CF_{2m_i+1}} |p_l(x)|\,dx \leq \sum_{l=0}^{2m_{i+1}-1} \int_{CF_{2m_i+1}} |p_l(x)|\,dx < 2^{-\nu_{2m_i+1}} < 2^{-(\nu_{2m_i+1}-1)}$$

On a de même $\sum_{t=0}^{i+1} \int_{CF_{2m_{i+1}+1}} |p'_{2m_t}(x)|\,dx + \sum_{t=0}^{i} \int_{CF_{2m_{i+1}+1}} |p'_{2m_t+1}(x)|\,dx < 2^{-(\nu_{2m_{i+1}+1})} < 2^{-(\nu_{2m_{i+1}+1}-1)}$; α.2) Soit I_k $(k=1,2,\cdots,k_0)$ un système élémentaire tel qu'on ait $I_k \cap F_{2m_i+j} \neq 0$ pour tout k. Puisqu'alors on a $I_k \cap F_{2m_i+j} \neq 0$ $(j \geq 1)$, il s'ensuit que $\sum_{k=1}^{k_0} \left|\int_{I_k} r_{2m_i+j}(x)\,dx\right| < 2^{-\nu_{2m_i+j}}$ $(j \geq 1)$. Donc,

$$\sum_{k=1}^{k_0} \left|\int_{I_k} r'_{2m_i+1}(x)\,dx\right| \leq \sum_{j=1}^{2(m_{i+1}-m_i)-1} \left(\sum_{k=1}^{k_0} \left|\int_{J_k} r_{2m_i+j}(x)\,dx\right|\right)$$

$\leq \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{k_0} \left|\int_{J_k} r_{2m_i+2l+1}(x)\,dx\right|\right) < \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-\nu_{2m_i+2l+1}} \leq 2^{-(\nu_{2m_i+1}-1)}$; on a α.3) de même que α.1).

Enfin, observons qu'on a à la fois $u' \leq u$ et $u \leq u'$. Pour tout $V(F_n, \nu_n; f_n)$, si m_i est un nombre naturel tel qu'on ait $n \leq 2m_i$, on a $V(F_n, \nu_n; f_n) \supseteq V(F_{2m_i+1}, \nu_{2m_i+1}-1; f_{2m_i+1})$. En effet, soit $g(x)$ une fonction quelconque dans $V(F_{2m_i+1}, \nu_{2m_i+1}-1; f_{2m_i+1})$. Alors, la fonction s'écrit $f_{2m_i+1}(x)+p(x)+r(x) = f_{2m_i}(x)+p(x)+r(x)$, où $p(x)$, $r(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3]. Mais $p(x)$ et $r(x)$ possèdent de plus les propriétés suivantes: [1] $r(x)$ s'annule pour tout $x \in F_{2m_i}$ puisque $F_{2m_i} \subseteq F_{2m_i+1}$; [2] On a $\int_a^b |p(x)|\,dx < 2^{-(\nu_{2m_i+1}-1)} \leq 2^{-\nu_{2m_i}}$ puisque $\nu_{2m_i+1}-1 \geq \nu_{2m_i}$; [3] De même, on a $\left|\int_a^b r(x)\,dx\right| < 2^{-\nu_{2m_i}}$. Donc, $g(x)$ est une fonction dans de $V(F_{2m_i}, \nu_{2m_i}; f_{2m_i})$, et par suite dans celle de $V(F_n, \nu_n; f_n)$. Donc, on a $u \geq u'$. D'autre part, puisqu'on a $V(F_n, \nu_n-1; f_n) \supseteq V(F_n, \nu_n; f_n)$ quel que soit n, on a évidemment $u \leq u'$. (à suivre)