28. *Über die rekursive Einführung der Funktionen in der reinen Zahlentheorie*

Von Shôji MAEHARA

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., March 12, 1957)

Beim Gentzenschen Widerspruchsfreiheitsbeweise für die reine Zahlentheorie,[1] setzt er von den Funktionen (und Prädikaten) voraus, dass sie *entscheidbar definiert* sind, und von den zahlentheoretischen Axiomen, dass sie *im Sinne der finiten Auffassung der Aussagenverknüpfungszeichen* richtig sind. In der Tat ist die von beliebigen entscheidbar definierten Funktionen durch eine rekursive Definition eingeführte Funktion auch entscheidbar definiert. Aber eine durch das ι-Zeichen dargestellte Funktion ist nicht immer entscheidbar definiert, also so ist eine von solchen Funktionen rekursiv definierte Funktion sicherlich auch nicht entscheidbar definiert. Es gilt ja sogar im allgemeinen nicht, dass das neue Axiom (d.h. „implizite Definition") für diese rekursive Funktion im Sinne der finiten Einstellung richtig ist.

Das Ziel der vorliegenden Bemerkung ist, die Widerspruchsfreiheit der rekursiven Definition der Funktion in der reinen Zahlentheorie nachzuweisen.

Im folgenden wollen wir die reine Zahlentheorie mit dem zahlentheoretischen Formalismus (Abk.: z.F.) darstellen, die aus dem engeren Prädikatenkalkül durch die Hinzufügung der mathematischen Axiome für die natürlichen Zahlen und des Schemas für die vollständige Induktion entsteht.

Hauptergebnis. Wenn die Formeln

(1) $$V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu \exists\mathfrak{y}[\mathfrak{A}(\mathfrak{y},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\,\&\,V\mathfrak{z}(\mathfrak{A}(\mathfrak{z},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\supset\mathfrak{z}=\mathfrak{y})]$$

und

(2) $$V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{x}V\mathfrak{u}\exists\mathfrak{y}[\mathfrak{B}(\mathfrak{y},\mathfrak{x},\mathfrak{u},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\,\&\,V\mathfrak{z}(\mathfrak{B}(\mathfrak{z},\mathfrak{x},\mathfrak{u},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\supset\mathfrak{z}=\mathfrak{y})]$$

z.F.-beweisbar sind, worin keine freie Zahlenvariable vorkommt, so ist dasjenige System widerspruchsfrei, das aus z.F. durch die Hinzufügung der neuen Axiome

(3) $$V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{y}(\mathfrak{A}(\mathfrak{y},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\supset F(\mathfrak{y},1,\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)),$$

(4) $$V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{x}V\mathfrak{u}V\mathfrak{y}[(F(\mathfrak{u},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\,\&\,\mathfrak{B}(\mathfrak{y},\mathfrak{x},\mathfrak{u},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu))\supset F(\mathfrak{y},\mathfrak{x}+1,\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)]$$

und

(5) $$V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{x}V\mathfrak{y}V\mathfrak{z}[(F(\mathfrak{y},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\,\&\,F(\mathfrak{z},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu))\supset\mathfrak{y}=\mathfrak{z}]$$

1) Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann., **112**, 493–565 (1936).

entsteht, wobei das neu hizugefügte Prädikatzeichen F nur an den angegebenen Stellen steht (siehe aber die Anmerkung am Ende).

1. Wir führen zunächst das Hilfssystem—wollen wir es Z^* nennen—ein, das sich von z.F. in folgender Weise unterscheidet:

1.1. Wir benutzen *freie* und *gebundene Prädikatenvariablen*, die ein- oder mehrstelligen Relationen von natürlichen Zahlen bedeuten, und die *Quantoren* V und $\mathit{\Xi}$ beziehen sich auf diese Prädikatenvariablen.

1.2. Wir fügen folgende *Schemata für logischen Grundformeln* und *für Schlussregeln* hinzu:

(6) $V\varphi\mathfrak{F}(\varphi)\supset\mathfrak{F}(\alpha)$, (7) $\mathfrak{F}(\alpha)\supset\mathit{\Xi}\varphi\mathfrak{F}(\varphi)$,

(8) $\dfrac{\mathfrak{C}\supset\mathfrak{F}(\alpha)}{\mathfrak{C}\supset V\varphi\mathfrak{F}(\varphi)}$, (9) $\dfrac{\mathfrak{F}(\alpha)\supset\mathfrak{C}}{\mathit{\Xi}\varphi\mathfrak{F}(\varphi)\supset\mathfrak{C}}$,

wobei α bzw. φ eine freie bzw. gebundene Prädikatenvariable mit beliebigen gleichen Leerstellen ist, aber in (8) und (9) α nur an der angegebenen Stellen steht;

(10) $$\mathit{\Xi}\varphi V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu(\varphi[\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu]\supset\subset\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)),$$

wobei φ eine gebundene ν-stellige Prädikatenvariable, ν irgendeine natürliche Zahl ist, und in $\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)$ *keine gebundene Prädikatenvariable* vorkommt.

2. **Satz 1.** Das System Z^* ist widerspruchsfrei.

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Resultates vom §2 der Takeutischen Arbeit „Construction of ramified real numbers".[2]

3. **Satz 2.** Wenn die Formeln (1) und (2) z.F.-beweisbar sind, so gibt es eine Z^*-Formel $\mathfrak{F}_0(b,a,a_1,\cdots,a_\nu)$ und sogar sind die Formeln

(11) $$V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{y}(\mathfrak{A}(\mathfrak{y},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\supset\mathfrak{F}_0(\mathfrak{y},1,\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)),$$

(12) $$V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{x}V\mathfrak{u}V\mathfrak{y}[(\mathfrak{F}_0(\mathfrak{u},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\ \&\ \mathfrak{B}(\mathfrak{y},\mathfrak{x},\mathfrak{u},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu))\supset\mathfrak{F}_0(\mathfrak{y},\mathfrak{x}+1,\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)]$$

und

(13) $$V\mathfrak{x}_1\cdots V\mathfrak{x}_\nu V\mathfrak{x}V\mathfrak{y}V\mathfrak{z}[(\mathfrak{F}_0(\mathfrak{y},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu)\ \&\ \mathfrak{F}_0(\mathfrak{z},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_\nu))\supset\mathfrak{y}=\mathfrak{z}]$$

Z^*-beweisbar.

Beweis. Zunächst beachten wir, dass die Formeln (1) und (2) auch Z^*-beweisbar sind. Daher sind die Formeln

$$\mathit{\Xi}\varphi\mathfrak{R}(\varphi,1,a_1,\cdots,a_\nu)$$

und

$$\mathit{\Xi}\varphi\mathfrak{R}(\varphi,a,a_1,\cdots,a_\nu)\supset\mathit{\Xi}\varphi\mathfrak{R}(\varphi,a+1,a_1,\cdots,a_\nu)$$

Z^*-beweisbar, also ist auch die Formel

(14) $$\mathit{\Xi}\varphi\mathfrak{R}(\varphi,a,a_1,\cdots,a_\nu)$$

Z^*-beweisbar, wobei $\mathfrak{R}(\alpha,a,a_1,\cdots,a_\nu)$ die Abkürzung für die Formel

$$V\mathfrak{q}(\mathfrak{A}(\mathfrak{q},a_1,\cdots,a_\nu)\supset\alpha[\mathfrak{q},1])$$
$$\&\ V\mathfrak{p}V\mathfrak{q}V\mathfrak{r}[(\mathfrak{p}<a\ \&\ \alpha[\mathfrak{r},\mathfrak{p}]\ \&\ \mathfrak{B}(\mathfrak{q},\mathfrak{p},\mathfrak{r},a_1,\cdots,a_\nu))\supset\alpha[\mathfrak{q},\mathfrak{p}+1]]$$

2) Ann. Jap. Assoc. Philos. Sci., **1**, 41–61 (1956).

$$\& \ V\mathfrak{p}(a<\mathfrak{p}\supset\alpha[1,\mathfrak{p}])$$
$$\& \ V\mathfrak{p}V\mathfrak{q}V\mathfrak{r}[(\alpha[\mathfrak{q},\mathfrak{p}] \ \& \ \alpha[\mathfrak{r},\mathfrak{p}])\supset\mathfrak{q}=\mathfrak{r}]$$

ist. Anderseits ist die Formel

(15) $$V\varphi V\psi[(\mathfrak{N}(\varphi,a,a_1,\cdots,a_\nu) \ \& \ \mathfrak{N}(\psi,a,a_1,\cdots,a_\nu)) \supset V\mathfrak{x}V\mathfrak{y}(\varphi[\mathfrak{y},\mathfrak{x}]\supset\subset\psi[\mathfrak{y},\mathfrak{x}])]$$

Z^*-beweisbar. Wir schreiben

$$\mathfrak{F}_0(b,a,a_1,\cdots,a_\nu) \quad \text{für} \quad V\varphi(\mathfrak{N}(\varphi,a,a_1,\cdots,a_\nu)\supset\varphi[b,a]).$$

Dann, nach (14) und (15), sind die Formeln (11), (12) und (13) Z^*-beweisbar, w. z. b. w.

4. Man nehme an, dass dasjenige System, das aus z.F. durch die Hinzufügung der Axiome (3), (4) und (5) entsteht, unter der Voraussetzung, dass die Formeln (1) und (2) z.F.-beweisbar sind, widerspruchsvoll wäre. So wäre die Formel $\neg((3)\,\&\,(4)\,\&\,(5))$ z.F.-beweisbar. Also wäre die Formel $\neg((11)\,\&\,(12)\,\&\,(13))$ Z^*-beweisbar. Aber auf Grund der Sätze 1 und 2 ist das unmöglich.

Damit ist das Hauptergebnis vollständig bewiesen.

5. Anmerkung. Die Widerspruchsfreiheit von mehrmalig aufeinanderfolgenden rekursiven Definitionen der Funktionen in der reinen Zahlentheorie kann in ganz analoger Weise, durch die Benutzung einer *verzweigten Typentheorie* für die natürlichen Zahlen[3] an Statt von Z^*, erledigt werden.

3) Vgl. § 2 der vorstehenden Takeutischen Arbeit.