8. L'Homologie du Produit Cyclique d'Ordre p d'un Complexe Fini (p Premier Impair)

Par Tsunéo YOSHIOKA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 13, 1958)

1. Soit K un espace topologique, K^p le produit de p espaces homéomorphes à K, Π le groupe cyclique d'ordre p engendré par la permutation cyclique des coordonnées de K^p : $T(x_1, x_2, \cdots, x_p)=(x_2, \cdots, x_p, x_1)$, $Q=K^p/\Pi$ l'espace quotient de K^p par Π, qui s'appelle le produit cyclique d'ordre p de l'espace K. Dans ce mémoire, K sera supposé un complexe fini connexe, dont l'homologie est connue, et p premier impair.

Pour le cas où $p=2$, S. K. Stein a établi l'homologie à coefficients entiers de Q [1]. D'autre part, M. Nakaoka a déterminé la cohomologie à valeurs entières de Q pour p premier et pour K complexes élémentaires [2]. Ce mémoire n'est consacré qu'à énoncer les résultats qui donnent l'homologie à coefficients entiers de Q et à déterminer les homologies spéciales de deux complexes M et $M(t)$ donnés dans 3°, à l'aide desquelles on a une base canonique d'homologie de Q. Une grande partie de la méthode pour démontrer le dernier théorème est due à Stein et deux complexes M et $M(t)$ m'ont été signalés par Nakaoka.

Désignons par $R_i(X)$ le i-ème nombre de Betti de l'espace X et par $t_i(X, q^r)$ (q premier et r entier positif) le nombre des i-èmes nombres de torsion de X divisibles par q^r. Les nombres de Betti et les nombres de torsion de Q seront déterminés par les formules suivantes, dont les deux premières sont bien connues.

$$(1)\qquad R_i(Q)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}R_i(K^p) & \text{pour } i\not\equiv 0 \bmod p,\\[2mm] \dfrac{1}{p}R_i(K^p)+\dfrac{p-1}{p}R_{i/p}(K) & \text{pour } i\equiv 0 \bmod p;\end{cases}$$

$$(2)\qquad t_i(Q, q^r)=\frac{1}{p}t_i(K^p, q^r)+(-1)^j\frac{p-1}{p}t_{(i-j)/p}(K, q^r);$$

$$(3)\qquad t_i(Q, p)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}t_i(K^p, p)+\dfrac{p-1}{p}t_{(i-j)/p}(K, p)\\ \qquad +\displaystyle\sum_{\frac{i+1}{p}\le s\le i-2}t_s(K, p)+\sum_{\substack{\frac{i+1}{p}\le s\le i-2\\ ps-i:\ \text{pair}}}B_s(K) & \text{pour } j \text{ pair},\\[2mm] \dfrac{1}{p}t_i(K^p, p)+\dfrac{1}{p}t_{(i-j)/p}(K, p)\\ \qquad +\displaystyle\sum_{\frac{i+1}{p}\le s\le i-2}t_s(K, p)+\sum_{\substack{\frac{i+1}{p}\le s\le i-2\\ ps-i:\ \text{pair}}}B_s(K) & \text{pour } j \text{ impair};\end{cases}$$

$$(4)\qquad t_i(Q,p^{r+1})=\begin{cases}\dfrac{1}{p}t_i(K^p,p^{r+1})+\dfrac{p-1}{p}t_{(i-p+1)/p}(K,p^{r+1}) & \text{pour } j=p-1,\\[2mm] \dfrac{1}{p}t_i(K^p,p^{r+1})-\dfrac{1}{p}t_{(i-j)/p}(K,p^{r+1})+t_{(i-j)/p}(K,p^r) & \text{pour } j \text{ pair } \leq p-3,\\[2mm] \dfrac{1}{p}t_i(K^p,p^{r+1})-\dfrac{p-1}{p}t_{(i-j)/p}(K,p^{r+1}) & \text{pour } j \text{ impair};\end{cases}$$

où $j\equiv i \bmod p$ $(p-1\geq j\geq 0)$, q premier $\neq p$, r entier positif.

2. Soit $C=(C_i, \partial)$ un complexe de chaînes, $\rho: C\to C$ une application de chaînes de C dans C. Soient C^ρ et $C^{\rho^{-1}}$ l'image et le noyau de ρ, qui sont aussi des complexes de chaînes et dont les homologies s'appellent les homologies spéciales. On a d'abord la suite exacte: $0\to C^{\rho^{-1}}\to C\to C^\rho\to 0$ et ensuite, par passage à l'homologie, la suite exacte de Smith-Richardson:

$$(5)\qquad \cdots\to H_i^{\rho^{-1}}(C)\to H_i(C)\to H_i^\rho(C)\xrightarrow{\partial_\rho} H_{i-1}^{\rho^{-1}}(C)\to\cdots\ .$$

Soit $T: C\to C$ une autre application de chaînes de C dans C, périodique d'ordre p. Alors $\sigma=1+T+\cdots+T^{p-1}$ et $\tau=1-T$ sont aussi des applications de chaînes. Désignons par ρ une des deux σ et τ et par $\bar\rho$ l'autre. Evidemment $C^\rho\subset C^{\bar\rho^{-1}}$. On a donc la suite exacte:

$$(6)\qquad \cdots\to H_i^\rho(C)\xrightarrow{j_\rho} H_i^{\bar\rho^{-1}}(C)\to H_i(C^{\bar\rho^{-1}}/C^\rho)\to H_{i-1}^\rho(C)\to\cdots$$

3. Dans ce qui suit, on supposera toujours que p soit un premier impair.

Soit $L=(L_i, \partial_0)$ le complexe de chaînes acyclique, dont les i-èmes groupes L_i réduisent à 0 sauf pour $i=n+1$ et n, dont les $(n+1)$- et n-ème L_{n+1} et L_n sont des groupes cycliques infinis engendrés par les éléments c_{n+1} et b_n resp., et dont le bord est défini par la formule $\partial_0 c_{n+1}=b_n$. Soit $M=L\otimes\cdots\otimes L$ le complexe de chaînes du p fois produit tensoriel de L, sur lequel opère T: $T(x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_p)=(-1)^{\deg x_1(\deg x_2+\cdots+\deg x_p)}x_2\otimes\cdots\otimes x_p\otimes x_1$.

Comme M est acyclique, ∂_σ et ∂_τ sont des isomorphisme-sur pour tout i. On voit immédiatement que j_τ est un isomorphisme-sur pour tout i et que j_σ l'est aussi sauf pour $i=pn+p$, $pn+p-1$ et pn. Grâce à ces isomorphismes, en partant des faits que $H_{pn+p}^\rho(M)=H_{pn+p}^{\rho^{-1}}(M)=0$, $H_{pn}^\sigma(M)=0$ et que $H_{pn+p-1}^\sigma(M)=Z_p$ est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la classe d'homologie de $\sigma(b_n\otimes c_{n+1}\otimes\cdots\otimes c_{n+1})=\partial_0(c_{n+1}\otimes\cdots\otimes c_{n+1})$, on a

$$(7)\qquad H_{pn+i}^\sigma(M)=\begin{cases}Z_p & \text{pour } i=2,4,\cdots,p-1,\\ 0 & \text{pour les autres } i;\end{cases}$$

$$(8)\qquad H_{pn+i}^{\tau^{-1}}(M)=\begin{cases}Z_p & \text{pour } i=0,2,4,\cdots,p-3,\\ 0 & \text{pour les autres } i;\end{cases}$$

$$(9)\qquad H_{pn+i}^\tau(M)=H_{pn+i}^{\sigma^{-1}}(M)=\begin{cases}Z_p & \text{pour } i=1,3,\cdots,p-2,\\ 0 & \text{pour les autres } i,\end{cases}$$

Notons $l_i=\binom{p}{i+1}-\binom{p}{i+2}+\cdots+(-1)^i\binom{p}{p}$.

La notion de la base canonique d'homologie affirme que, pour base de groupes abéliens libres, (α) M_{pn+i} ($p\geq i\geq 0$) admet des cycles a^k_{pn+i} ($k=1,\cdots,l_i$) et des chaînes e^k_{pn+i} ($k=1,\cdots,l_{i+1}$), qui vérifient $\partial_0 e^k_{pn+i+1}=a^k_{pn+i}$; ($\beta$) si i est pair ($p-1\geq i\geq 2$) M^σ_{pn+i} admet un cycle ϕ^σ_{pn+i}, des cycles $a^{\sigma,k}_{pn+i}$ ($k=1,\cdots,(l_i-1)/p$) et des chaînes $e^{\sigma,k}_{pn+i}$ ($k=1,\cdots,(l_{i-1}-p+1)/p$); ($\beta'$) M^σ_{pn} est le groupe cyclique infini engendré par $p\,(b_n\otimes\cdots\otimes b_n)=\partial_0\sigma(c_{n+1}\otimes b_n\otimes\cdots\otimes b_n)$; ($\beta''$) si i est impair ($p-2\geq i\geq 1$) M^σ_{pn+i} admet des cycles $a^{\sigma,k}_{pn+i}$ ($k=1,\cdots,(l_i-p+1)/p$), une chaîne ψ^σ_{pn+i} et des chaînes $e^{\sigma,k}_{pn+i}$ ($k=1,\cdots,(l_{i-1}-1)/p$); (β''') M^σ_{pn+p} est un groupe cyclique infini engendré par $p\,(c_{n+1}\otimes\cdots\otimes c_{n+1})$; les formules de bord sont alors: $\partial_0 p(c_{n+1}\otimes\cdots\otimes c_{n+1})=a^\sigma_{pn+p-1}$, $\partial_0 e^{\sigma,k}_{pn+i+1}=a^{\sigma,k}_{pn+i}$, $\partial_0\psi^\sigma_{pn+i+1}=p\phi^\sigma_{pn+i}$ et $\partial_0\psi^\sigma_{pn+1}=p(b_n\otimes\cdots\otimes b_n)$; ($\gamma$) si i est pair ($p-1\geq i\geq 2$) M^τ_{pn+i} admet des cycles $a^{\tau,k}_{pn+i}$ ($k=1,\cdots,(l_i-1)(p-1)/p$), une chaîne ψ^τ_{pn+i} et des chaînes $e^{\tau,k}_{pn+i}$ ($k=1,\cdots,(l_{i-1}(p-1)-1)/p$); ($\gamma'$) si i impair ($p-2\geq i\geq 1$), M^τ_{pn+i} admet un cycle ϕ^τ_{pn+i}, des cycles $a^{\tau,k}_{pn+i}$ ($k=1,\cdots,(l_i(p-1)-1)/p$) et des chaînes $e^{\tau,k}_{pn+i}$ ($k=1,\cdots,(l_{i-1}-1)(p-1)/p$); ils vérifient les formules de bord: $\partial_0\psi^\tau_{pn+i+1}=p\phi^\tau_{pn+i}$ et $\partial_0 e^{\tau,k}_{pn+i+1}=a^{\tau,k}_{pn+i}$. Remarquons $M^\tau_{pn+p}=M^\tau_{pn}=0$.

Soit t un entier positif, $L(t)=(L_i(t);\partial)$ le complexe de chaînes déterminé par: $L_i(t)=L_i$ et $\partial c_{n+1}=tb_n$, $M(t)=L(t)\otimes\cdots\otimes L(t)$ (p fois) sur lequel opère T. Comme $\partial=t\cdot\partial_0$, les bases canoniques pour M, M^σ et M^τ sont aussi des bases canoniques pour $M(t)$, $M^\sigma(t)$ et $M^\tau(t)$, à l'aide desquelles on a

$$H_{pn+i}(M(t))=\begin{cases}Z_t+\cdots+Z_t(l_i \text{ fois}) & \text{pour } p-1\geq i\geq 0,\\ 0 & \text{pour les autres } i;\end{cases}\tag{10}$$

$$H^\sigma_{pn+i}(M(t))=\begin{cases}Z_{tp} & \text{pour } i=p-1,\\ Z_t+\cdots+Z_t((l_i-p+1)/p \text{ fois}) & \\ & \text{pour } i \text{ impair } (p-4\geq i\geq 3),\\ Z_{tp}+Z_t+\cdots+Z_t(Z_t\text{: } (l_i-1)/p \text{ fois}) & \\ & \text{pour } i \text{ pair } (p-3\geq i\geq 2),\\ Z_t & \text{pour } i=0,\\ 0 & \text{pour les autres } i;\end{cases}\tag{11}$$

$$H^{\tau^{-1}}_{pn+i}(M(t))=\begin{cases}Z_t & \text{pour } i=p-1,\\ Z_{tp} & \text{pour } i=0,\\ H^\sigma_{pn+i}(M(t)) & \text{pour les autres } i;\end{cases}\tag{12}$$

$$H^\tau_{pn+i}(M(t))=\begin{cases}Z_t+\cdots+Z_t((l_i-1)(p-1)/p \text{ fois}) & \\ & \text{pour } i \text{ pair } (p-3\geq i\geq 2),\\ Z_{tp}+Z_t+\cdots+Z_t(Z_t\text{: } l_i(p-1)/p \text{ fois}) & \\ & \text{pour } i \text{ impair } (p-2\geq i\geq 1),\\ 0 & \text{pour les autres } i.\end{cases}\tag{13}$$

4. Soit K un complexe simplicial fini connexe, p un premier

impair, $Q=K^p/\Pi$ le produit cyclique d'ordre p de K. Après la subdivision canonique bien connue, K^p est muni d'une structure simpliciale compatible avec l'opérateur T, par rapport à laquelle le diagonal est un sous-complexe. Une chaîne de K^p s'identifiera canoniquement à son image par l'opération de subdivision.

Le groupe de chaînes de K possède une base canonique d'homologie formée par des cycles (g_n), (b_n), (b'_n) et des chaînes (c_{n+1}), (c'_{n+1}), qui jouissent des formules de bord $\partial c_{n+1}=tb_n$ $(t>1)$ et $\partial c'_{n+1}=b'_n$. Les indices signifient la dimension des éléments. Alors $H_*(K,Z)$ admet, pour une base de groupe abélien,*) les classes d'homologie de g_n et de b_n dont les ordres sont infinis et t resp. Supposons, de plus, que g_0 soit un sommet de K.

$H_*(K^p,Z)$ possède pour une base les classes des cycles de types suivants: (α) $v=g_0\times\cdots\times g_0$; (β) $z_{pn}=g_n\times\cdots\times g_n$, pour chaque cycle g_n $(n>0)$; (γ) a^k_{pn+i}, $k=1,\cdots,l_i$, qui correspondent, pour chaque couple (c_{n+1},b_n) vérifiant $\partial c_{n+1}=tb_n$, biunivoquement aux cycles a^k_{pn+i} donnés dans 3°; (δ) $h, Th, T^2h,\cdots, T^{p-1}h$, qui sont Π-libres en apparence. En effet, on peut choisir des cycles appartenant à (δ) de telle manière qu'ils soient différents de ceux qui appartiennent aux (α), (β) et (γ) et qu'ils soient Π-libres. L'ordre des classes des cycles v et z_{pn} est infini et celui des a^k_{pn+i} est t. L'ordre commun des classes des cycles $h, Th,\cdots, T^{p-1}h$ sera noté par t'. Pour chaque couple (c_{n+1},b_n), les σ- et τ-cycles correspondant biunivoquement aux ϕ^{σ}_{pn+i}, $a^{\sigma,k}_{pn+i}$, ϕ^{τ}_{pn+i} et $a^{\tau,k}_{pn+i}$ seront dans K^p notés par les mêmes symbols.

Définissons par récurrence quelques cycles importants.

(α) On peut choisir, pour chaque cycle g_n $(n>0)$ de K, une suite de chaînes (z'_i) $(pn\geq i\geq n+1)$ de K^p, telles que $\sigma z'_{pn}=z_{pn}=g_n\times\cdots\times g_n$ et que $\rho z'_i=\partial z'_{i+1}$ ($\rho=\tau$ pour $pn-i$ impair; $\rho=\sigma$ pour $pn-i$ pair ≥ 2), bien que la manière de choisir ne soit pas unique. On peut supposer que le support de chaque chaîne z'_i soit contenu dans celui de $g_n\times\cdots\times g_n$. Posons $\bar{z}_i=\partial z'_{i+1}$ pour $pn-1\geq i\geq n+1$ et $\bar{\bar{z}}_n=\partial z'_{n+1}$.

(β) De même, pour chaque couple (c_{n+1},b_n) vérifiant $\partial c_{n+1}=tb_n$ et $t\equiv 0 \bmod p$, choisissons deux suites de chaînes (x'_i) $(pn\geq i\geq n+1)$ et (y'_j) $(pn+p\geq j\geq n+2)$, telles que $\sigma x'_{pn}=a_{pn}=b_n\times\cdots\times b_n$, que $\rho x'_i=\partial x'_{i+1}$ ($\rho=\tau$ pour $pn-i$ impair; $\rho=\sigma$ pour $pn-i$ pair ≥ 2), que $\sigma y'_{pn+p}=c_{n+1}\times\cdots\times c_{n+1}$ et $\tau y'_{pn+p-1}=\dfrac{1}{p}\partial(c_{n+1}\times\cdots\times c_{n+1})-\partial y'_{pn+p}$, et que $\rho y'_j=\partial y'_{j+1}$ ($\rho=\sigma$ pour $pn+p-j$ pair ≥ 2; $\rho=\tau$ pour $pn+p-j$ impair ≥ 3). On peut aussi supposer que les supports de chacune x'_i et de chacune y'_j soient contenus dans ceux de $b_n\times\cdots\times b_n$ et de $c_{n+1}\times\cdots\times c_{n+1}$ resp.

*) Une base du groupe abélien A est un système d'éléments de A, (a_i), qui engendrent le groupe A et qui vérifient la condition suivante: étant t_i l'ordre de a_i, la relation $\sum m_i a_i=0$ entraîne $m_i\equiv 0 \bmod t_i$.

Posons $\bar{x}_i=\partial x'_{i+1}$ pour $pn-1\geq i\geq n+1$, $\bar{\bar{x}}_n=\partial x'_{n+1}$, $y_{pn+p-1}=\tau y'_{pn+p-1}$, $\bar{y}_j=\partial y'_{j+1}$ pour $pn+p-2\geq j\geq n+2$, et $\bar{\bar{y}}_{n+1}=\partial y'_{n+2}$.

	Tableau I						Tableau II					
Dimension	Pour chaque cycle g_n $(n>0)$		Pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) telle que $t\equiv 0 \bmod p$		Pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) telle que $t\not\equiv 0 \bmod p$		Pour chaque cycle g_n $(n>0)$		Pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) telle que $t\equiv 0 \bmod p$		Pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) telle que $t\not\equiv 0 \bmod p$	
$pn+p-1$			a_{pn+p-1}	t	a_{pn+p-1}	t			y_{pn+p-1}	p		
$pn+2i+1$ $\left(\frac{p-3}{2}\geq i\geq 0\right)$			$\bar{y}_{pn+2i+1}$ $a^{\sigma,k_1}_{pn+2i+1}$	p t	$a^{\sigma,k_1}_{pn+2i+1}$	t			$\phi^{\tau}_{pn+2i+1}$ $a^{\tau,k_3}_{pn+2i+1}$	tp t	$\phi^{\tau}_{pn+2i+1}$ $a^{\tau,k_3}_{pn+2i+1}$	t t
$pn+2i$ $\left(\frac{p-3}{2}\geq i\geq 1\right)$			ϕ^{σ}_{pn+2i} a^{σ,k_2}_{pn+2i}	tp t	ϕ^{σ}_{pn+2i} a^{σ,k_2}_{pn+2i}	t t			$\bar{y}_{pn+2i}$ a^{τ,k_4}_{pn+2i}	p t	a^{τ,k_4}_{pn+2i}	t
pn	z_{pn}	∞	a_{pn}	tp	a_{pn}	t			$\bar{y}_{pn}$	p		
$pn-2i+1$ $\left(\frac{p-1}{2}n-1\geq i\geq 1\right)$			$\bar{y}_{pn-2i+1}$	p			$\bar{z}_{pn-2i+1}$	p	$\bar{x}_{pn-2i+1}$	p		
$pn-2i$ $\left(\frac{p-1}{2}n-1\geq i\geq 1\right)$	$\bar{z}_{pn-2i}$	p	$\bar{x}_{pn-2i}$	p					$\bar{y}_{pn-2i}$	p		
$n+1$			$\bar{\bar{y}}_{n+1}$	p			$\bar{\bar{z}}_{n+1}$	p	$\bar{\bar{x}}_{n+1}$	p		
n	$\bar{\bar{z}}_n$	p	$\bar{\bar{x}}_n$	p								
	σh					t'	$\tau h, \tau Th, \cdots, \tau T^{p-2}h$					t'

où $k_1=1,\cdots, (l_{2i+1}-p+1)/p$, $k_2=1,\cdots, (l_{2i}-1)/p$,
$k_3=1,\cdots, (l_{2i+1}(p-1)-1)/p$, $k_4=1,\cdots, (l_{2i}-1)(p-1)/p$.

Théorème. (α) *Les classes d'homologie de pv et des cycles dans Tableau I, aux cycles $\bar{\bar{x}}_n$, $\bar{\bar{y}}_{n+1}$ et $\bar{\bar{z}}_n$ près, forment une base de $H^{\sigma}_{*}(K^p, Z)$. L'ordre de la classe de pv dans H^{σ}_{*} est infini et les ordres des autres sont indiqués du côté droit dans le tableau.*

(β) *Les classes d'homologie de v et de tous les cycles dans le premier tableau forment une base de $H^{\tau^{-1}}_{*}(K^p, Z)$. L'ordre de la classe de v dans $H^{\tau^{-1}}_{*}$ est infini et les ordres des autres sont indiqués dans le tableau.*

(γ) *Les classes d'homologie des cycles dans le deuxième tableau forment une base de $H^{\tau}_{*}(K^p, Z)=H^{\sigma^{-1}}_{*}(K^p, Z)$.*

(δ) *L'homomorphisme* $j_\sigma : H_*^\sigma(K^p, Z) \to H_*^{\tau^{-1}}(K^p, Z)$ *est biunivoque et son conoyau est isomorphe à* $H_*(K, Z_p)$.

Remarque. *Grâce à l'isomorphisme canonique* $H_*(Q, Z) \approx H_*^\sigma(K^p, Z)$, *l'homologie à coefficients entiers du produit cyclique d'ordre p du complexe K sera complètement déterminée.*

Références

[1] S. K. Stein: Homology of the two-fold symmetric product, Ann. Math., **59**, 570–583 (1954).

[2] M. Nakaoka: Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications, Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., **7**, 51–102 (1956).