24. *Sur le Problème de Neumann pour l'Équation* $\Delta u(P)=F(P, u(P), \partial u(P))$

Par Tokui SATŌ
Institut de Mathématiques, Université de Kobe
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 12, 1958)

Récemment MM. Johannes et Joachin Nitsche[1] ont obtenu des résultats intéressents relatifs au probèlme de Neumann pour l'équation

$$\partial_x\partial_x u+\partial_y\partial_y u=(\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2.$$

On peut étendre leurs résultats à un cas plus général. Par exemple, considérons l'équation

$$\Delta u(P)=F(P, u(P), \partial u(P)) \tag{1}$$

et cherchons la solution qui satisfait à la condition

$$\frac{du(P)}{dn}=f(P) \tag{2}$$

sur la frontière, où Δ est le laplacien:

$$\Delta u=\partial_1\partial_1 u+\partial_2\partial_2 u+\partial_3\partial_3 u$$

et $\dfrac{du(P)}{dn}$ est la dérivée prise suivant la normale intérieure.

Soient T un domaine appartenant à B_h et S sa frontière dans l'espace des variables x_1, x_2, x_3. Soient $f(x_1, x_2, x_3)$ une fonction continue sur S et $F(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3)$ une fonction continue et majorée en module par une constante M dans le domaine

$$(x_1, x_2, x_3)\in S\cup T,\ -\infty<u, p_1, p_2, p_3<+\infty.$$

Supposons d'abord qu'une solution de l'équation (1) continue dans $S\cup T$ satisfait à la condition (2), les dérivées partielles du premier et du deuxième ordres étant continues respectivement dans $S\cup T$ et dans T. Si S' est la frontière d'un domaine T' dans T, la formule de Green[2] donne

$$\int_{S'}\frac{du(Q)}{dn}d\sigma_Q=-\int_{T'}F(Q, u(Q), \partial u(Q))d\omega_Q, \tag{3}$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire de S et $d\omega$ celui de volume de T. La fonction $1/r_{PQ}$, où r_{PQ} est la distance du point variable Q à un point fixe P, est harmonique dans l'espace entier sauf au point P. En désignant par $T(\delta)$ le domaine limité par S et par une sphère $S(\delta)$ de centre P et de rayon δ assez petit, on obtient

1) Johannes und Joachin Nitsche: Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta\varphi=\varphi_x^2+\varphi_y^2$, Math. Ann., **126** (1953).

2) R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, **2**, 231 (1937).

$$\int_{S(\delta)}\left(u(Q)\frac{d}{dn}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{r_{PQ}}\frac{du(Q)}{dn}\right)d\sigma_Q$$
$$=-\int_S\left(u(Q)\frac{d}{dn}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{r_{PQ}}\frac{du(Q)}{dn}\right)d\sigma_Q+\int_{T(\delta)}\frac{1}{r_{PQ}}F(Q,u(Q),\partial u(Q))d\omega_Q.$$

L'intégrale

$$\int_{S(\delta)}u(Q)\frac{d}{dn}\frac{1}{r_{PQ}}d\sigma_Q=-\frac{1}{\delta^2}\int_{S(\delta)}u(Q)d\sigma_Q$$

converge vers $-4\pi u(P)$ lorsque $\delta\to 0$. On a de plus, d'après (3),

$$\left|\int_{S(\delta)}\frac{1}{r_{PQ}}\frac{du(Q)}{dn}d\sigma_Q\right|=\frac{1}{\delta}\left|\int_{S(\delta)}\frac{du(Q)}{dn}d\sigma_Q\right|$$
$$=\frac{1}{\delta}\left|\int_{T_1(\delta)}F(Q,u(Q),\partial u(Q))d\omega_Q\right|,$$

où $T_1(\delta)$ est l'intérieur de $S(\delta)$. Donc on obtient, en faisant $\delta\to 0$,

$$u(P)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left(u(Q)\frac{d}{dn}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{r_{PQ}}\frac{du(Q)}{dn}\right)d\sigma_Q$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_T\frac{1}{r_{PQ}}F(Q,u(Q),\partial u(Q))d\omega_Q.$$

Soit $\Gamma(P,Q)$ la fonction de Neumann relative à T, c'est-à-dire la fonction telle que

$$\Gamma(P,Q)=\frac{1}{r_{PQ}}+w(Q),$$

oú $w(Q)$ est une fonction harmonique qui est régulière dans T et satisfait à la condition

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{r_{PQ}}+\frac{dw}{dn}=k\qquad(k=\text{const}\neq 0)$$

sur la frontière S. Si l'on remplace $1/r_{PQ}$ par $\Gamma(P,Q)-w(Q)$ dans l'égalité ci-dessus et remarque que l'on a, d'après la formule de Green,

$$\int_S\left(\frac{dw(Q)}{dn}u(Q)-w(Q)\frac{du(Q)}{dn}\right)d\sigma_Q=\int_T w(Q)F(Q,u(Q),\partial u(Q))d\omega_Q,$$

on obtient

$$(4)\qquad\begin{aligned}u(P)&=-\frac{1}{4\pi}\int_S\Gamma(P,Q)f(Q)d\sigma_Q\\&-\frac{1}{4\pi}\int_T\Gamma(P,Q)F(Q,u(Q),\partial u(Q))d\omega_Q+\frac{k}{4\pi}\int_S u(Q)d\sigma_Q.\end{aligned}$$

On a par suite le

Théorème 1. *Si une solution $u=u(P)$ de l'équation* (1), *admettant des dérivées partielles du premier ordre continues dans $S\cup T$ et des dérivées partielles du deuxième ordre continues dans T, satisfait à la condition* (2) *sur S, on a* (4) *et*

$$\int_S f(Q)d\sigma_Q=-\int_T F(Q,u(Q),\partial u(Q))d\omega_Q.$$

Considérons l'équation en $u(P)$:

$$u(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_S \Gamma(P,Q)f(Q)d\sigma_Q-\frac{1}{4\pi}\int_T \Gamma(P,Q)F(Q,u(Q),\partial u(Q))d\omega_Q. \tag{5}$$

L'équation en

$$v(P)=u(P)+\frac{1}{4\pi}\int_S \Gamma(P,Q)f(Q)d\sigma_Q,$$

s'écrit

$$\begin{aligned} v(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_T \Gamma(P,Q)F\Big(Q,\, & v(Q)-\frac{1}{4\pi}\int_S \Gamma(Q,Q')f(Q')d\sigma_{Q'}, \\ & \partial\Big(v(Q)-\frac{1}{4\pi}\int_S \Gamma(Q,Q')f(Q')d\sigma_{Q'}\Big)\Big)d\omega_Q. \end{aligned} \tag{6}$$

$\int_S \Gamma(P,Q)f(Q)d\sigma_Q$ étant une fonction harmonique dans T, on peut démontrer, comme le théorème d'existence dans mon article,[3] que l'équation (6) admet une solution continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans $S\cup T$. L'équation (5) admet donc une solution $u=u(P)$ continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans $S\cup T$.

Désignons maintenant par Δ le laplacien généralisé:

$$\begin{aligned} &\Delta v(x_1, x_2, x_3) \\ &=\lim_{r\to 0}\frac{3}{2\pi r^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\{v(x_1+r\sin\theta\cos\varphi,\, x_2+r\sin\theta\sin\varphi, \\ &\qquad x_3+r\cos\theta)-v(x_1, x_2, x_3)\}\sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

Alors $u=u(P)$ vérifie (1) dans T et

$$\frac{du(P)}{dn}=f(P)+C \;[4] \tag{7}$$

sur S, où

$$C=\frac{k}{4\pi}\Big\{\int_S f(Q)d\sigma_Q-\int_T F(Q,u(Q),\partial u(Q))d\omega_Q\Big\}. \tag{8}$$

On peut donc énoncer le

Théorème 2. *L'équation* (5) *admet une solution $u=u(P)$ continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans $S\cup T$ qui satisfait aux relations* (1) *et* (7), *où C est la constante définie par* (8). *Cette solution satisfait à l'équation* (1) *dans T, si l'on entend par Δ le laplacien généralisé.*

3) T. Satō: Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z=f(x,y,z,p,q)$, Comp. Math., **12** (1954).

4) 福原満洲雄: 積分方程式 (基礎数学講座), 共立出版 (1955) (M. Hukuhara: L'Équation Intégrale, Kyôritsu-Shuppan, en japonais).