23. *Sur la Relation de Fuchs Relative à l'Équation Différentielle Linéaire*

Par Masuo HUKUHARA
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 12, 1958)

1. On sait déjà que l'on a la relation*)

$$\lambda+\lambda'+\mu+\mu'=1$$

pour

$$P\left\{\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix}\infty \\ \alpha \quad \lambda\end{matrix}} & 0 & \\ & \mu & x \\ \alpha' \quad \lambda' & \mu' & \end{matrix}\right\}.$$

C'est l'analogue de la relation de Fuchs relative à la fonction P de Riemann, et il m'a semblé vraisemblable que l'on pourrait obtenir une formule analogue dans le cas général où l'équation différentielle linéaire admet des points singuliers irréguliers.

Considérons l'équation différentielle linéaire

$$\begin{aligned} x^{(m+1)n}y^{(n)}+x^{(m+1)(n-1)}p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots \\ +x^{m+1}p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0, \end{aligned} \tag{1}$$

où $p_1(x),\cdots,p_n(x)$ sont des fonctions holomorphes en $x=0$. Elle peut être considérée comme l'équation limite de l'équation

$$\begin{aligned} (x^{m+1}-a^{m+1})^n y^{(n)}+(x^{m+1}-a^{m+1})^{n-1}p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots \\ +(x^{m+1}-a^{m+1})p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \end{aligned} \tag{2}$$

pour $a\to 0$. Celle-ci admet dans le voisinage de 0 $m+1$ points singuliers réguliers $\varepsilon^j a$ $(j=0,1,\cdots,m)$, où

$$\varepsilon=\exp\frac{2\pi i}{m+1}.$$

Soient $\lambda_{j1},\cdots,\lambda_{jn}$ les n racines de l'équation déterminante de (2) en $x=\varepsilon^j a$.

D'autre part, l'équation (1) admet en général n solutions formelles de la forme

$$y=e^{A(x)}x^{\lambda}\{\gamma_0+\gamma_1 x+\cdots+\gamma_m x^m+\cdots\} \quad (\gamma_0\neq 0), \tag{3}$$

où

$$A(x)=-\frac{\alpha_0}{mx^m}-\frac{\alpha_1}{(m-1)x^{m-1}}-\cdots-\frac{\alpha_{m-1}}{x}. \tag{4}$$

Si, par exemple, l'équation en α:

$$\alpha^n+p_1(0)\alpha^{n-1}+\cdots+p_{n-1}(0)\alpha+p_n(0)=0 \tag{5}$$

admet n racines distinctes, à chaque racine α_{0k} de cette équation cor-

---

*) 福原満洲雄: 常微分方程式の解法, II, 線型の部, 岩波書店 (1941) (M. Hukuhara: Intégration des Équations Différentielles Ordinaires, II, Équations Linéaires, Iwanami, en japonais).

respond une solution formelle où α_0 prend la valeur α_{0k}. Désignons par $\alpha_{1k},\cdots,\alpha_{mk},\lambda_k$ les valeurs que prennent $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1},\lambda$ lorsque $\alpha_0=\alpha_{0k}$.

J'ai pu démontrer que la somme des λ_{jk} tend vers la somme des λ_j lorsque $a\to 0$ dans les cas $m=1,2,3$. Il serait donc naturel d'en conjecturer que l'on aurait la même conclusion dans le cas de m quelconque. Je vais maintenant d'en donner une démonstration. Ce fait établi, il serait facile d'étendre la formule de Fuchs au cas où l'équation différentielle linéaire admet des points singuliers irréguliers.

2. L'équation déterminante de (2) en $x=\varepsilon^j a$ est

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\frac{1}{m+1}\frac{p_1(\varepsilon^j a)}{(\varepsilon^j a)^m}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)+\cdots=0.$$

Par suite on a

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{1}{m+1}\frac{p_1(\varepsilon^j a)}{(\varepsilon^j a)^m}.$$

On a ensuite

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}=\frac{(m+1)n(n+1)}{2}-\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\Big\{p_1(0)(\varepsilon^j a)^{-m}$$

$$+p_1'(0)(\varepsilon^j a)^{1-m}+\cdots+\frac{p_1^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}(\varepsilon^j a)^{-1}+\frac{m+1}{m!}p_1^{(m)}(0)+\cdots\Big\}.$$

On en déduit

$$\lim_{a\to 0}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}=\frac{(m+1)n(n-1)}{2}-\frac{p_1^{(m)}(0)}{m!}, \tag{6}$$

car

$$\sum_{j=0}^{m}(\varepsilon^j a)^{-m}=\sum_{j=0}^{m}(\varepsilon^j a)^{1-m}=\cdots=\sum_{j=0}^{m}(\varepsilon^j a)^{-1}=0.$$

3. Posons

$$z=x^{\lambda}\{\gamma_0+\gamma_1 x+\cdots\},$$

et calculons les dérivées de $y=e^{A(x)}z$. On voit sans peine

$$y^{(k)}=e^{A(x)}\Big\{A'(x)^k z+\binom{k}{2}A'(x)^{k-2}A''(x)z+kA'(x)^{k-1}z'+\cdots\Big\}$$

et les termes non écrits contiennent $x^{\lambda-(k-1)(m+1)}$ en facteur. On a donc

$$\begin{aligned}&z\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(x)(x^{m+1}A'(x))^k\\ &+x^m z\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}p_{n-k}(x)(x^{m+1}A'(x))^{k-2}(x^{m+2}A''(x))\\ &+x^{m+1}z'\sum_{k=1}^{n}kp_{n-k}(x)(x^{m+1}A'(x))^{k-1}+\cdots=0,\end{aligned} \tag{7}$$

où

$$p_0(x)\equiv 1,\quad x^{m+1}A'(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_{m-1}x^{m-1},$$

les termes non écrits contenant $x^{\lambda+m+1}$ en facteur.

Cela posé, considérons l'équation algébrique en u:

$$F(u,x)=0, \tag{8}$$

où

$$F(u,x)=u^n+p_1(x)u^{n-1}+\cdots+p_{n-1}(x)u+p_n(x).$$

Posons

$$F(u,x)=F(u)+xF_1(u)+x^2F_2(u)+\cdots\ .$$

Si les n racines de l'équation $F(u)=0$ sont toutes différentes, les n racines de l'équation (8) sont des fonctions holomorphes de x en 0. Calculons la somme de ces racines:

$$B_k(x)=\beta_{0k}+\beta_{1k}x+\cdots+\beta_{hk}x^h+\cdots\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n}B_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{uF'_u(u,x)}{F(u,x)}du$$
$$=-(\text{résidu de } uF'_u/F \text{ en } u=\infty),$$

où C est un cercle de centre 0 et de rayon assez grand. Or, on a

$$\frac{uF'_u(u,x)}{F(u,x)}=(n+(n-1)u^{-1}p_1(x)+\cdots)/(1+u^{-1}p_1(x)+\cdots)$$
$$=n-u^{-1}p_1(x)+\cdots\ .$$

On a par suite

$$\sum_{k=1}^{n}B_k(x)=-p_1(x),\quad \sum_{k=1}^{n}\beta_{hk}=-\frac{p_1^{(h)}(0)}{h!}.$$

La relation (7) montre que les m premiers termes de la première somme dans le premier membre s'annulent. Par suite $x^{m+1}A'(x)$ coïncide avec les m premiers termes de l'une des n racines de l'équation (8). On peut donc poser

$$\alpha_{jk}=\beta_{jk}\quad (k=1,2,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots,m-1)$$

et l'on a

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}=-\frac{p_1^{(j)}(0)}{j!}\qquad (j=0,1,\cdots,m-1).$$

4. Pour simplifier l'écriture, nous désignons par

$$B(x)=\beta_0+\beta_1x+\cdots+\beta_hx^h+\cdots$$

une des racines $B_k(x)$ et nous supposons que $x^{m+1}A'(x)$ coïncide avec les m premiers termes de $B(x)$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(x)(x^{m+1}A'(x))^k$$
$$=\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(x)\{B(x)^k+k(x^{m+1}A'(x)-B(x))B(x)^{k-1}+\cdots\}$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}k\alpha_0^{k-1}\beta_m p_{n-k}(0)x^m+\cdots$$
$$=-\beta_mF'(\alpha_0)x^m+\cdots,$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs à m. La relation qui détermine λ devient donc

$$-\beta_mF'(\alpha_0)-(m+1)\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}p_{n-k}(0)\alpha_0^{k-1}+\lambda\sum_{k=1}^{n}kp_{n-k}(0)\alpha_0^{k-1}=0.$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$\lambda=\beta_m+\frac{m+1}{2}\,\frac{\alpha_0F''(\alpha_0)}{F'(\alpha_0)}.$$

Par suite

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=\sum_{k=1}^{n}\beta_{mk}+\frac{m+1}{2}\,\frac{\alpha_{0k}F''(\alpha_{0k})}{F'(\alpha_{0k})}.$$

Or, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{0k}F''(\alpha_{0k})}{F'(\alpha_{0k})}=\lim_{n\to\infty}\frac{u^2F''(u)}{F(u)}=n(n-1).$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=\frac{(m+1)n(n-1)}{2}-\frac{p_1^{(m)}(0)}{m!}$$

et en remarquant la relation (6), on obtient la relation à démontrer

$$\lim_{a\to\infty}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k. \tag{9}$$

5. Nous dirons que

$$\rho^n+p_1(0)\rho^{n-1}+\cdots+p_{n-1}(0)\rho+p_n(0)=0 \tag{10}$$

est *l'équation déterminante* en 0 de l'équation (1). Si elle admet n racines différentes l'une de l'autre, nous dirons que l'origine est un *point singulier ordinaire de multiplicité* $m+1$. A chaque racine α_0 de l'équation (10) correspond une solution formelle (3). Les nombres α_0, $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\lambda$ seront appelés les *exposants caractéristiques* correspondant à la racine α_0 et, en particulier, λ le *dernier exposant caractéristique.* Si une équation se ramène par la transformation $x=t-a$ à l'équation, qui admet 0 comme point singulier ordinaire de multiplicité $m+1$, le point a sera appelé aussi point singulier ordinaire de multiplicité $m+1$ de l'équation proposée. Les exposants caractéristiques en 0 de la transformée sont les exposants caractéristiques en a de la proposée. Dans le cas du point à l'infini, il suffit de considérer la transformation $x=1/t$ au lieu de $x=t-a$.

Cela posé, considérons l'équation

$$q_0(x)y^{(n)}+q_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+q_{n-1}(x)y'+q_n(x)y=0, \tag{11}$$

où $q_0(x), q_1(x),\cdots, q_n(x)$ sont des polynomes de x. Les zéros $a_1, a_2,\cdots$, a_m de $q_0(x)$ sont des points singuliers de l'équation (11). Si a_j est un point singulier régulier (ou point singulier de multiplicité $\mu_j=1$), nous désignons par $\lambda_{j1}, \lambda_{j2},\cdots,\lambda_{jn}$ les n racines de l'équation déterminante en a_j. Si a_j est un point singulier ordinaire de multiplicité μ_j, nous désignons par $\lambda_{j1},\cdots,\lambda_{jn}$ les n derniers exposants caractéristiques. On définit de même μ_∞ et $\lambda_{\infty 1},\cdots,\lambda_{\infty n}$ par rapport au point à l'infini. Supposons que les points $a_1, a_2,\cdots, a_m$ et ∞ soient des points singuliers réguliers ou des points singuliers multiples ordinaires. On peut alors considérer (11) comme l'équation limite d'une équation du type de Fuchs qui admet $M=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m+\mu_\infty$ points singuliers réguliers, y compris le point à l'infini. Le résultat du paragraphe 4 nous montre que l'on a la *formule généralisée de Fuchs*:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{\infty k}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}=(M-2)n(n-1)/2. \tag{12}$$

6. Revenons à l'équation différentielle (1) et cherchons la signification analytique de la somme qui se trouve dans le second membre de la relation (9).

Soit $(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))$ un système fondamental de solutions de l' équation (2) définies dans un voisinage d'un point x_0. Si x rentre au point de départ x_0, en décrivant une lacet autour de a, il subit une substitution linéaire qui sera représentée par une matrice A_0. Puis, si x rentre au point de départ x_0, en décrivant une lacet autour de a_1, il subit une substitution linéaire qui sera représentée par une matrice A_1, et ainsi de suite. Par suite, si x rentre au point de départ x_0, en décrivant dans le sens positif une courbe fermée autour de $a, a\varepsilon,\cdots, a\varepsilon^m$, le système fondamental de solutions $(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))$ subit une substitution linéaire qui sera représentée par le produit des matrices $A_0, A_1,\cdots, A_m$. Il est bien connu que si $\lambda_{j1}, \lambda_{j2},\cdots, \lambda_{jn}$ sont les racines de l'équation déterminante en $a\varepsilon^j$, $\exp \lambda_{jk}$ $(k=1, 2,\cdots, n)$ sont les n racines de l'équation

$$|A_j-\lambda I| = 0.$$

On a donc

$$\exp \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk}=(-1)^n\,|A_j|$$

et puis

$$\exp \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk}=(-1)^{n(m+1)}\,|A_0A_1\cdots A_m|.$$

En y faisant $a\to 0$, on obtient la formule

$$\exp \sum_{k=1}^{n} \lambda_k=(-1)^{n(m+1)}\,|A|,$$

où la matrice A représente une substitution que subit un système fondamental de solutions de (1) quand x rentre au point de départ x_0, en décrivant une lacet autour de 0.