129. *L'Intégrale (E. R.) et la Théorie des Distributions*

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1958)

Dans cette Note, nous montrerons trois propositions suivantes:

Proposition 1. *Si $f(x)$ est une fonction intégrable (E. R.)*[1] *définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$*[2] *dans un intervalle $[a, b]$, et si $g(x)$ est une fonction à variation bornée dans $[a, b]$, $f(x)g(x)$ est également une fonction intégrable (E. R.) définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$, et on a, en désignant par $F(x)$ une intégrale (E. R.) indéfinie de $f(x)$,*

$$(E.\,R.)\int_a^b f(x)g(x)\,dx=F(b)g(b)-(S)\int_a^b F(x)dg(x).$$[3]

Proposition 2. *Si $f(x)$, $-\infty<x<+\infty$, est une fonction localement intégrable (E. R.) définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$,*[4] *la fonction*

$$f(\varphi)=(E.\ R.)\int f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi\in(\mathcal{D}),$$

est une distribution d'ordre≤ 1.

Proposition 3. *Si $T(\varphi)$ est une distribution réelle définie dans l'espace euclidien de dimension 1, quel que soit l'intervalle I_0, il existe une suite fondamentale $u=\{V(F_n, \nu_n; g_n)\}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\varphi(x)\,dx=T(\varphi) \qquad \textit{pour toute } \varphi\in(\mathcal{D}_{I_0}).$$

Lemme 1. *Soit $u=\{V(F_n, \nu_n; f_n)\}$ une suite fondamentale qui satisfait à la condition $[3_1]$. Alors, pour toute fonction $g(x)$ monotone non décroissante et bornée, $|g(x)|<2^\alpha$ (α un entier positif), il existe une*

---

1) Une fonction $f(x)$ est dit intégrable (*E. R.*) si $f(x)$ est définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale $\{V(F_n, \nu_n; f_n)\}$ jouissant de la propriété P^*. Nous désignerons l'intégrale (*E. R.*) d'une telle fonction $f(x)$, c.-à-d. $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ par $(E.\,R.)\int_a^b f(x)dx$. Voir K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215–220 (1956).

2) $[3_1]$: Pour tout intervalle $[c, d]$ contenu dans $[a, b]$, on a $\left|\int r(x)dx\right|<2^{-\nu}$; voir S. Nakanishi: Sur la dérivation de l'intégrale (*E. R.*) indéfinie. I, Proc. Japan Acad., **34**, 199–204 (1958).

3) M. H. Okano a donné cette formule à l'autre condition dans la Note: Multiplication of (*E. R.*)-integrable functions, Proc. Japan Acad., **34**, 585–586 (1958).

4) C.-à-d. il existe, pour tout x, $-\infty<x<+\infty$, un intervalle I qui contient x et sur lequel $f(x)$ est définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$ et jouissant de la propriété P^*.

suite des fonctions $\{g_m(x)\}$, *en escalier, monotones non décroissantes qui convergent uniformément vers* $g(x)$, *telle que*

$$u^*=\{V(F_0^*, \nu_0^*; f_0(x)g_0(x)),\cdots, V(F_{4n}^*, \nu_{4n}^*; f_{4n}(x)g_{2n}(x)),$$
$$V(F_{4n+1}^*, \nu_{4n+1}^*; f_{4n+1}(x)g_{2n+1}(x)),\cdots\}$$

où $F_k^*=\bigcap_{m=k}^{\infty} F_m$ *et* $\nu_k^*=\nu_k-\alpha-3$, *soit une suite fondamentale satisfaisant à la condition* [3_1]. *On a en outre*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)\,dx=I[u^*].$$ [5]

En effet, pour la fonction $g(x)$, il suffit de prendre une suite des fonctions $\{g_m(x)\}$, en escalier, monotones non décroissantes telles qu'on ait

$$g_{2n}(x)=g_{2n+1}(x), \qquad |g_m(x)|<2^\alpha \quad \text{et}$$
$$|g(x)-g_{2n+1}(x)|,\ |g_m(x)-g_{2n+1}(x)|<\frac{2^{-\nu_{4n+1}}}{3A_{4n+1}(b-a)}$$

pour tout $m>2n+1$, où $A_{4n+1}=\max_{0\leq m\leq n}\{\max_{a\leq x\leq b}|f_{4m+1}(x)|\}$.

De plus, on voit le

Lemme 2. *Si la suite fondamentale u jouit, outre qu'elle satisfait à la condition* [3_1], *de la propriété* P^*, *il en est de même de la suite* u^*.

Démonstration de la Proposition 1. D'après les Lemme 2 et Prof. K. Kunugi: Loc. cit., Théorème 4, on peut évidemment admettre que la fonction $g(x)$ est monotone non décroissante. On a d'abord, en posant

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(x)\,dx,$$

la relation

$$\int_a^b f_n(x)g(x)\,dx=F_n(b)g(b)-(S)\int_a^b F_n(x)dg(x).$$

D'autre part, puisque la fonction $F(x)$ est continue[6] et que $F_n(x)$ convergent uniformément vers $F(x)$, on a l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_a^b F_n(x)dg(x)=(S)\int_a^b F(x)dg(x).$$

Par conséquent, du Lemme 1, il résulte la relation voulue.

Lemme 3. *Si une fonction* $f(x)$ *est respectivement définie comme des fonctions-limites des suites fondamentales* u^1 *et* u^2 *dans des intervalles* $[a, c]$ *et* $[c, b]$, *où* $a<c<b$, *la fonction* $f(x)$ *est également définie comme celle d'une suite fondamentale u dans* $[a, b]$. *De plus, si* u^1 *et* u^2 *jouissent de la propriété* P^*, *il en est de même de la suite u, et on a*

$$(E.\ R.)\int_a^b f(x)\,dx=(E.\ R.)\int_a^c f(x)\,dx+(E.\ R.)\int_c^b f(x)\,dx.$$

5) Pour la notation, voir K. Kunugi: Loc. cit.

6) Voir S. Nakanishi: Loc. cit.

En effet, pour deux suites $u^1=\{V(F_n^1, \nu_n^1; f_n^1)\}$ et $u^2=\{V(F_n^2, \nu_n^2; f_n^2)\}$,

$$u=\{V(F_0^{1*}\cup F_0^{2*}, 2^{-(\nu_0-2)}; f_0^1(x)+f_0^2(x)),\cdots,$$
$$V(F_{6n}^{1*}\cup F_{6n}^{2*}, 2^{-(\nu_{6n}-2)}; f_{6n}^1(x)+f_{6n}^2(x)),$$
$$V(F_{6n+1}^{1*}\cup F_{6n+1}^{2*}, 2^{-(\nu_{6n+1}-2)}; f_{6n+1}^1(x)+f_{6n+1}^2(x)),\cdots\},$$

où $F_k^{1*}=\bigcap_{m=k}^{\infty} F_m^1$, $F_k^{2*}=\bigcap_{m=k}^{\infty} F_m^2$ et $\nu_k=\min(\nu_k^1, \nu_k^2)$, est une suite fondamentale jouissant de toutes les propriétés voulues.

On voit aussi facilement que, si u^1 et u^2 satisfont à la condition [3_1], il en est de même de u.

Donc, si $f(x)$, $-\infty<x<+\infty$, est une fonction qui est localement définie comme une fonction-limite d'une suite fondamentale satisfaisant à la condition [3_1] et jouissant de la propriété P^*, elle est aussi définie sur tout intervalle comme une fonction-limite d'une suite fondamentale possédant des mêmes propriétés. Par conséquent, de le Proposition 1, il résulte la Proposition 2.

Désignerons dans la suite par A_l^m l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi\in(\mathcal{D})$, vérifiant $|\varphi^{(n)}(a)|<l$ pour $n\leq m$.

Lemme 4. *Pour la distribution dans l'espace euclidien de dimension* 1

$$T(\varphi)=\varphi^{(m)}(a), \quad \varphi\in(\mathcal{D}),$$

où a est un point fixe quelconque et m est un nombre entier ≥ 1, il existe une suite des fonctions $f_k(x)$ $(k=1, 2,\cdots)$, en escalier, jouissant des propriétés suivantes:

1) *on peut prendre une suite décroissante des intervalles ouverts $\{(a, b_k)\}$, vérifiant*

$$\underset{x}{E}[f_k(x)\neq 0]\subseteq(a, b_k) \quad et \quad \lim_{k\to\infty} b_k=a,$$

2) *on a* $\int f_k(x)\,dx=0$ *pour tout* k,

3) *on a* $\lim_{k\to\infty}\int f_k(x)\varphi(x)\,dx=\varphi^{(m)}(a)$ *pour toute* $\varphi\in(\mathcal{D})$, *et en particulier la convergence est uniforme sur tout* A_l^{m+1} $(l=1, 2,\cdots)$.

Démonstration. 1°. Posons

$$a_i=a+1/2^i \ (i=1, 2,\cdots),$$

alors, en vertu du Théorème de la moyenne, on a pour $\varphi\in(\mathcal{D})$

$$|\varphi^{(m)}(a)-2^i(\varphi^{(m-1)}(a_i)-\varphi^{(m-1)}(a))|<\frac{1}{2^{i-1}}\max_x|\varphi^{(m+1)}(x)|.$$

En outre, 2°. Pour une suite quelconque des fonctions non-négatives et sommables $\{g_n(x)\}$ telles qu'on ait $\underset{x}{E}[g_n(x)\neq 0]\subseteq(a-1/2^n, a+1/2^n)$ et qu'on ait $\int g_n(x)\,dx=\lambda$ quel que soit n, on a

$$\left|\int g_n(x)\varphi(x)\,dx-\lambda\varphi(a)\right|<\frac{\lambda}{2^{n-1}}\max_x|\varphi'(x)|,$$

pour $\varphi\in(\mathcal{D})$.

Ceci dit, montrerons par induction le résultat voulu. Soit ε_k ($k=1, 2,\cdots$) une suite des nombres positifs tels que $\varepsilon_k \downarrow 0$. Alors, d'après 1°, on peut choisir une suite partielle i_k ($k=1, 2,\cdots$), vérifiant

$$|\varphi'(a)-2^{i_k}(\varphi(a_{i_k})-\varphi(a))|<\varepsilon_k/2 \quad \text{pour toute } \varphi\in A_k^2.$$

Soient

$$g_n^k(x)=\begin{cases}-2^{2i_k+n} & \text{pour } x\in(a, a+1/2^{i_k+n})\\ 0 & \text{partout ailleurs}\end{cases}$$

$$h_n^k(x)=-g_n^k(x-a_{i_k}+a)$$

pour $n=1, 2,\cdots$. On a alors $\int g_n^k(x)\,dx=-2^{i_k}$ et $\int h_n^k(x)\,dx=2^{i_k}$, quel que soit n. Donc, d'après 2°, pour ε_k il existe un indice n_k tel que $n_k<n_{k+1}$ et qu'on ait à la fois pour toute $\varphi\in A_k^2$

$$\left|\int g_{n_k}^k(x)\varphi(x)\,dx+2^{i_k}\varphi(a)\right|<\varepsilon_k/4 \quad \text{et} \quad \left|\int h_{n_k}^k(x)\varphi(x)\,dx-2^{i_k}\varphi(a_{i_k})\right|<\varepsilon_k/4.$$

$f_k(x)=g_{n_k}^k(x)+h_{n_k}^k(x)$ ($k=1, 2,\cdots$) est une suite des fonctions jouissant de toutes les propriétés voulues.

En supposant que le Lemme soit vrai jusqu'à $m-1$, montrerons qu'il est aussi vrai pour m. D'après 1°, pour la suite $\{\varepsilon_k\}$ on peut choisir une suite partielle i_k ($k=1, 2,\cdots$), vérifiant

$$|\varphi^{(m)}(a)-2^{i_k}(\varphi^{(m-1)}(a_{i_k})-\varphi^{(m-1)}(a))|<\varepsilon_k/2 \quad \text{pour } \varphi\in A_k^{m+1}.$$

Par hypothèse d'induction, il existe deux suites des fonctions $g_k(x)$ ($k=1, 2,\cdots$) telles que:

1) on a $\underset{x}{E}[g_k(x)\neq 0]\subseteq(a, a+1/2^{i_k})$,

2) on a $\int g_k(x)\,dx=0$ pour tout k,

3) on a $\left|\int g_k(x)\varphi(x)\,dx+\varphi^{(m-1)}(a)\right|<\varepsilon_k/2^{i_k+2}$ pour $\varphi\in A_k^{m+1}$,

et $h_k(x)$ ($k=1, 2,\cdots$) telles que:

1) on a $\underset{x}{E}[h_k(x)\neq 0]\subseteq(a_{i_k}, a_{i_k}+1/2^{i_k})$,

2) on a $\int h_k(x)\,dx=0$ pour tout k,

3) on a $\left|\int h_k(x)\varphi(x)\,dx-2^{i_k}\varphi^{(m-1)}(a_{i_k})\right|<\varepsilon_k/4$ pour $\varphi\in A_k^{m+1}$.

$f_k(x)=g_k(x)+h_k(x)$ ($k=1, 2,\cdots$) est une suite des fonctions jouissant de toutes les propriétés voulues.

Lemme 5. *Soient $f(x)$ une fonction réelle mesurable et bornée définie dans un intervalle $[\alpha, \beta]$, m un nombre entier ≥ 1 et $T(\varphi)$ une distribution définie par la formule*

$$T(\varphi)=\int_\alpha^\beta f(x)\varphi^{(m)}(x)\,dx, \quad \varphi\in(\mathcal{D}).$$

Alors, étant donnée $\{\eta_k\}$ tels que $\eta_k\downarrow 0$, on peut choisir une suite des fonctions $f_k(x)$ ($k=1, 2,\cdots$), en escalier, jouissant des propriétés suivantes:

1) *il existe une suite croissante des nombres entiers positifs* $\{l_k\}$, *vérifiant*

$$\underset{x}{E}[f_k(x)\neq 0]\subseteq\bigcup_{t=1}^{2^{l_k}-1}(h_t^k,\, h_t^k+\eta_k),\ \textit{où}\ h_t^k=\alpha+\frac{t}{2^{l_k}}(\beta-\alpha),$$

2) *on a* $\int f_k(x)\,dx=0$ *pour tout* k,

3) *on a* $\lim_{k\to\infty}\int f_k(x)\varphi(x)\,dx=T(\varphi)$ *pour toute* $\varphi\in(\mathcal{D})$, *et en particulier la convergence est uniforme sur tout* A_l^{m+1} $(l=1,2,\cdots)$.

Démonstration. Soit ε_k $(k=1,2,\cdots)$ une suite des nombres positifs tels que $\varepsilon_k\downarrow 0$. Il existe pour la fonction $f(x)$ une suite des fonctions $\{g_n(x)\}$, en escalier, telles que:

1°) $g_n(x)$ tend vers $f(x)$ presque partout,

2°) on a $\lim_{n\to\infty}\int|g_n(x)-f(x)|\,dx=0$,

3°) quel que soit n, $g_n(x)$ est bornée en module par un nombre positif N.

Donc, il existe une suite partielle $g_{n_k}(x)$ $(k=1,2,\cdots)$ de $\{g_n(x)\}$ telles que

$$\left|T(\varphi)-\int g_{n_k}(x)\varphi^{(m)}(x)\,dx\right|<\varepsilon_k/3 \qquad \text{pour } \varphi\in A_k^{m+1}.$$

Puisque la fonction $g_{n_k}(x)$ est en escalier, elle s'écrit

$$g_{n_k}(x)=\begin{cases}v_i^k & \text{si } x\in I_i^k\ (i=1,2,\cdots,i_k)\\ 0 & \text{si } x\,\bar{\in}\,\bigcup_i I_i^k,\end{cases}$$

où I_i^k $(i=1,2,\cdots,i_k)$ est des intervalles ouverts disjoints d'un nombre fini. Pour un nombre entier positif l, partageons l'intervalle $[\alpha,\beta]$ par une échelle de nombres croissants:

$$h_0=\alpha,\ h_1=\alpha+\frac{1}{2^l}(\beta-\alpha),\cdots,\ h_t=\alpha+\frac{t}{2^l}(\beta-\alpha),\cdots,\ h_{2^l}=\beta.$$

Désignons par h_{ij}^k $(j=1,2,\cdots,j_i)$ tous les nombres h_t appartenant à I_i^k, et par J_{ij}^k l'intervalle $\left[h_{ij}^k,\, h_{ij}^k+\frac{1}{2^l}(\beta-\alpha)\right]$. On a alosr pour toute $\varphi\in A_k^{m+1}$

$$\left|\sum_{i=1}^{i_k}\sum_{j=1}^{j_i}\frac{v_i^k}{2^l}\varphi^{(m)}(h_{ij}^k)-\int_\alpha^\beta g_{n_k}(x)\varphi^{(m)}(x)\,dx\right|\leq\frac{1}{2^{l-2}}\{Nk(\beta-\alpha+i_k)\}.$$

Donc, il existe une suite croissante des nombres positifs l_k $(k=1,2,\cdots)$, vérifiant

$$\left|\sum_{i=1}^{i_k}\sum_{j=1}^{j_i}\frac{v_i^k}{2^{l_k}}\varphi^{(m)}(h_{ij}^k)-\int_\alpha^\beta g_{n_k}(x)\varphi^{(m)}(x)\,dx\right|<\varepsilon_k/3.$$

En outre, en vertu du Lemme 4, il existe une fonction $f_{ij}^k(x)$ jouissant des propriétés suivantes:

1) on a $\underset{x}{E}[f_{ij}^k(x)\neq 0]\subseteq(h_{ij}^k,\, h_{ij}^k+\eta_k)$,

2) on a $\int f_{ij}^k(x)\,dx=0$,

3) on a pour $\varphi\in A_k^{m+1}$

$$\left|\int f_{ij}^k(x)\varphi(x)\,dx-\frac{v_i^k}{2^{l_k}}\varphi^{(m)}(h_{ij}^k)\right|<\frac{\varepsilon_k}{3.2^{l_k}},$$

de sorte qu'on ait

$$\left|\sum_{i=1}^{i_k}\sum_{j=1}^{j_i}f_{ij}^k(x)\varphi(x)\,dx-\sum_{i=1}^{i_k}\sum_{j=1}^{j_i}\frac{v_i^k}{2^{l_k}}\varphi^{(m)}(h_{ij}^k)\right|<\varepsilon_k/3.$$

$f_k(x)=\sum_{i=1}^{i_k}\sum_{j=1}^{j_i}f_{ij}^k(x)$ $(k=1,2,\cdots)$ est une suite des fonctions jouissant de toutes les propriétés voulues.

Démonstration de la Proposition 3. Comme nous avons déjà vu, pour tout intervalle $I_0=[\alpha,\beta]$, il existe un nombre entier ≥ 1 m, et une fonction réelle mesurable et bornée $f(x)$ tels que

$$T(\varphi)=\int f(x)\varphi^{(m)}(x)\,dx \qquad \text{pour } \varphi\in(\mathcal{D}_{I_0}).$$

Posons $\eta_k=1/2^{2l_k+2}$ $(k=1,2,\cdots)$, et soit $f_k(x)$ $(k=1,2,\cdots)$ une suite des fonctions choisie pour $\{\eta_k\}$ dans le Lemme 5. Alors, on voit que si l'on pose

$$F_{2k_0}=F_{2k_0+1}=[\alpha,\beta]-\bigcup_{k=k_0}^{\infty}\left\{\bigcup_{i=1}^{2^{l_k}-1}(h_i^k,h_i^k+\eta_k)\right\},$$

$$g_{2k+1}(x)=g_{2k}(x)=f_k(x) \quad \text{et} \quad \nu_m=m,$$

$\{V(F_m,\nu_m;g_m)\}$ est une suite fondamentale telle que

$$\lim_{m\to\infty}\int g_m(x)\varphi(x)\,dx=T(\varphi) \qquad \text{pour } \varphi\in(\mathcal{D}_{I_0}).$$