7. *Sur les Topologies des Espaces de L. Schwartz*

Par Tameharu SHIRAI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1959)

Dans cette Note, nous donnerons une règle de construction de la plus fine véritable-topologie des véritable-topologies qui sont moins fines que la pseudo-topologie donné, et montrons que la véritable-topologie induite de la pseudo-topologie est la topologie qui préserve la famile des transformations continues, et que la véritable-topologie $\tilde{\mathfrak{T}}$ induite de la pseudo-topologie de $(\mathcal{D})$ sera strictment plus fine que la véritable-topologie $\mathfrak{T}^*$ de $(\mathcal{D})$, qui a été donnée par M. L. Schwartz.[1]

1. Nous pouvons démontrer facilement le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit $\mathfrak{T}$ une topologie monotone de l'espace X et on dénote par $\bar{A}$ la fermeture de l'ensemble A par rapport à la topologie $\mathfrak{T}$ et soit $\tilde{\mathfrak{T}}$ la topologie qui a*

$$\tilde{A}=\bigcap_{F\supseteq(\bar{F}\cup A)} F$$

comme la fermeture nouvelle de A. La topologie $\tilde{\mathfrak{T}}$ a les propriétés suivantes:

(i) *$\tilde{\mathfrak{T}}$ est monotone, et $\tilde{A}\supseteq A$,*

(ii) $$\tilde{\tilde{A}}\subseteq\tilde{A},$$

(iii) $$\tilde{A}\supseteq\bar{A},$$

(iv) *si $\mathfrak{T}$ satisfait la condition que $\bar{A}\supseteq A$, $\tilde{\mathfrak{T}}$ est la topologie la plus fine des topologies qui soient moins fines que $\mathfrak{T}$ en ayant la propriété que toutes les fermetures sont fermées.*

Définitions. La topologie qui a la propriété que toutes les fermetures sont fermées s'appelle *véritable-topologie* et la topologie qui n'a pas la propriété ci-dessus s'appelle *pseudo-topologie*. Si $\mathfrak{T}$ est une pseudo-topologie monotone, la topologie $\tilde{\mathfrak{T}}$ donnée dans le Théorème 1 s'appelle *la véritable-topologie induite* de la topologie $\mathfrak{T}$.

Théorème 2. *Si T est une transformation continue* $(\mathfrak{T})$[2] *de X dans Y, T est continue $(\tilde{\mathfrak{T}})$ aussi. Réciproquement, une transformation T arbitraire mais continue $(\tilde{\mathfrak{T}})$ est continue $(\mathfrak{T})$ aussi, si $\mathfrak{T}$ est monotone et a la propriété que toute fermeture $(\mathfrak{T})$ $\bar{A}$ contient A.* (Remarque: T n'est pas nécessairement linéaire.)

En effet, si A est fermé $(\mathfrak{T})$, A est un des Γ tel que $\Gamma\supseteq(\bar{\Gamma}\cup A)$, et donc $\tilde{A}\subseteq A$, c'est-à-dire A est fermé $(\tilde{\mathfrak{T}})$. Par conséquent, quand

1) Voir L. Schwartz: Théorie des Distributions, **1**, 24, 67.
2) Ce signifie que T est continue par rapport à la topologie $\mathfrak{T}$.

T est continue ($\mathfrak{T}$) dans X, $T^{-1}(F)$ est toujour fermé ($\tilde{\mathfrak{T}}$) dans X où F est un ensemble fermé dans Y.

Réciproquement, soit T une transformation continue ($\tilde{\mathfrak{T}}$). Posons $A=T^{-1}(F)$. Si $\mathfrak{T}$ satisfait les conditions de ce théorème, on a $\tilde{A}\supseteq\bar{A}\supseteq A$, par consequent on a $\bar{A}=A$, puisque $A=T^{-1}(F)$ est fermé ($\tilde{\mathfrak{T}}$).

A l'égard des relations entre la topologie $\mathfrak{T}$ et la topologie induite $\tilde{\mathfrak{T}}$, on a le théorème suivant:

Théorème 3.[3] *$\{G(p)\}$ est le système fondamental des voisinages ($\tilde{\mathfrak{T}}$) de p, où $\{G(p)\}$ signifie le système de tous les ensembles ouverts ($\mathfrak{T}$) qui contiennent le point p.*

2. Soit $\mathfrak{T}$ la pseudo-topologie de ($\mathcal{D}$) qui a été donnée par L. Schwartz; $\mathfrak{T}$ est une pseudo-topologie au sens ci-dessus. Soit A un sous-ensemble de l'espace vectoriel ($\mathcal{D}$) et dénotons par $\bar{A}$ l'ensemble des fonctions limites ($\mathfrak{T}$) des fonctions contenues dans A:

$$\bar{A}=\{\psi;\ {}^{\exists}\varphi_j \xrightarrow[\mathfrak{T}]{} \psi,\ \ \varphi_j\in A\}.$$

Lemme 1.
$$\bar{A}=\bigcup_K \overline{A\frown(\mathcal{D}_K)}$$
où K signifie un ensemble compact arbitraire dans l'espace euclidien R^n de dimensions n.

En effet, puisque $\mathfrak{T}$ est monotone, on a $\bar{A}\supseteq \bigcup_K \overline{A\frown(\mathcal{D}_K)}$. Quelque soit une fonction ψ contenue dans $\bar{A}$, il existe une famille des fonctions $\{\varphi_j\}$ telles que $\varphi_j\in A$ et que $\varphi_j \xrightarrow[\mathfrak{T}]{} \psi$. D'ailleurs, d'après la définition de $\mathfrak{T}$, il existe un ensemble compact K tel que $\varphi_j\in(\mathcal{D}_K)$ pour tout j. Par conséquent, on a $\varphi_j\in A\frown(\mathcal{D}_K)$ pour tout j, donc on a $\psi\in\overline{A\frown(\mathcal{D}_K)}$.

Théorème 4. *Soit $\mathfrak{T}$ la pseudo-topologie de ($\mathcal{D}$) qui a été donnée par L. Schwartz. Pour qu'un sous-ensemble U de ($\mathcal{D}$) ait φ comme un point intérieur ($\mathfrak{T}$) il faut et il suffit que U satisfasse à la condition suivante:*

Quelque soit un ensemble compact $K(\supseteq K_\varphi)$, il existe une voisinage $V(m;\varepsilon;K)$ tel que $\varphi+V(m;\varepsilon;K)\subseteq U$, où K_φ signifie le support compact de φ.

Démonstration. Soit U un voisinage ($\mathfrak{T}$) de φ c'est-à-dire $\varphi\in I(U)=(\overline{U^c})^c$. En vertu du Lemme 1, $\varphi\notin\overline{U^c}=\bigcup_K\overline{U^c\frown(\mathcal{D}_K)}$. Puisque $\varphi\in(\mathcal{D}_K)$ pour tout $K\supseteq K_\varphi$, il existe un voisinage $V(m;\varepsilon;K)$ tel que $(\varphi+V(m;\varepsilon;K))\frown(U^c\frown(\mathcal{D}_K))=\phi$. D'ailleurs, $\varphi+V(m;\varepsilon;K)\subseteq(\mathcal{D}_K)$ pour $K\supseteq K_\varphi$, donc il faut que $\varphi+V(m;\varepsilon;K)\subseteq U$.

Réciproquement, si U satisfait à la condition de ce théorème, il existe un voisinage $V(m;\varepsilon;K)$ tel que $(\varphi+V(m;\varepsilon;K))\frown U^c=\phi$, pour

3) Dans ce théorème, nous ne supposons pas que $\mathfrak{T}$ est monotone; donc $\tilde{\mathfrak{T}}$ n'aura pas nécessairement la propriété que $\tilde{\tilde{A}}\subseteq\tilde{A}$.

tout ensemble compact K. Par suite $\phi=(\varphi+V(m;\varepsilon;K))\frown U^c\frown(\mathcal{D}_K)$, donc $\varphi\notin\overline{U^c\frown(\mathcal{D}_K)}$ pour tout ensemble compact $K(\supseteq K_\varphi)$. D'ailleurs, pour $K\not\supseteq K_\varphi$, on a $\varphi\notin(\mathcal{D}_K)=\overline{(\mathcal{D}_K)}\supseteq\overline{U^c\frown(\mathcal{D}_K)}$.

Par conséquent, en vertu du Lemme 1, on a $\varphi\in(\bigcup_K\overline{U^c\frown(\mathcal{D}_K)})^c$ $=(\overline{U^c})^c=I(U)$.

3. Soit $\mathfrak{T}$ la pseudo-topologie de $(\mathcal{D})$ donnée par L. Schwartz. Nous allons donner une méthode de construire un voisinage $(\tilde{\mathfrak{T}})$ de 0, et en le faisant, nous montreront que la topologie $\tilde{\mathfrak{T}}$ est *strictment plus fine* que la véritable-topologie de $(\mathcal{D})$ donnée par L. Schwartz.

Dorénavant, nous dénoterons par B_ρ la boule fermée de rayon $\rho(>0)$ dans R^n, et par K_φ le support compact de la fonction φ. On a la proposition suivante:

Proposition 1. *$V(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\};\{B_\nu\})$ est ouvert $(\mathfrak{T})$, où $V(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\};\{B_\nu\})$ est l'ensemble des fonctions $\varphi\in(\mathcal{D})$ qui, quelque soit ν, vérifient, pour $x\notin I(B_\nu)$*

$$|D^p\varphi(x)|<\varepsilon_\nu,\quad si\ |p|\leq m_\nu.$$

Ce système des voisinages $V(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\};\{B_\nu\})$ est clairement équivalent à celui qui a été donné par M. L. Schwartz.[4]

Construction des ensembles ouverts $(\mathfrak{T})$: Considérons des transformations univoques $t_{\lambda,\mu}$ $(\lambda=1,2,3,\cdots;\ \mu=0,1,2,\cdots)$ de l'espace $(\mathcal{D})$ dans l'ensemble des couples de nombres $\{(m,\varepsilon);\ m=1,2,3,\cdots,\ {}^\forall\varepsilon>0\}$, et posons

$$t_{\lambda,\mu}(\varphi)=(m_{\lambda,\mu}(\varphi);\ \varepsilon_{\lambda,\mu}(\varphi)),\qquad \varphi\in(\mathcal{D}),$$
$$G_0^{(\lambda)}=V(m_{\lambda,0}(0);\ \varepsilon_{\lambda,0}(0);\ B_\lambda),$$
$$G_\mu^{(\lambda)}=\bigcup_{0\neq\varphi\in G_{\mu-1}^{(\lambda)}}(\varphi+V(m_{\lambda,\mu}(\varphi);\ \varepsilon_{\lambda,\mu}(\varphi);\ B_{\lambda+\mu}),\qquad 1\leq\mu<\infty,$$
$$G^{(\lambda)}=\bigcup_{0\leq\mu<\infty}G_\mu^{(\lambda)},$$
$$G=\bigcup_{1\leq\lambda<\infty}G^{(\lambda)}.$$

Alors, nous pouvons démontrer le lemme suivant:

Lemme 2. *G est ouvert $(\mathfrak{T})$. Quelque soit la fonction $\varphi\neq0$ de G, il existe deux nombres entiers λ_0 et μ_0 tels que $\varphi\in{}_{\mu_0}^{(\lambda_0)}$, et que φ peut s'exprimer comme la suivante*

$$\varphi=\varphi_{\lambda_0}+\varphi_{\lambda_0+1}+\cdots+\varphi_{\lambda_0+\mu_0},$$

où $0\neq\varphi_{\lambda_0}\in V(m_{\lambda_0,0}(0);\ \varepsilon_{\lambda_0,0}(0);\ B_{\lambda_0}),\qquad \varphi_{\lambda_0+\mu}\in V(m_{\lambda_0,\mu}(\varphi_{\lambda_0}+\cdots+\varphi_{\lambda_0+\mu-1});$ $\varepsilon_{\lambda_0,\mu}(\varphi_{\lambda_0}+\cdots+\varphi_{\lambda_0+\mu-1});\ B_{\lambda_0+\mu}),\qquad 1\leq\mu\leq\mu_0.$

Si pour tout φ de $(\mathcal{D})$, $\{m_{\lambda,\mu}(\varphi)\}$ ou $\{\varepsilon_{\lambda,\mu}(\varphi)\}$ est croissant ou décroissant monotonement respectivement, par rapport à λ ou μ quand μ ou λ est fixé respectivement, la topologie de l'espace vectoriel qui a le système $\{G\}$ comme le système fondamental des voisinages de la fonction 0 est une véritable-topologie.

4) Voir ouvrage de L. Schwartz cité dans 1), p. 67.

Exemple 1. Soient $\{m_\nu\}$ une suite de nombres entiers ≥ 0 croissante et $\{\varepsilon_\nu\}$ une suite de nombres >0 décroissante. Posons

$$U_0^{(\lambda)}(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\}) = V(m_\lambda;\varepsilon_\lambda;B_\lambda)$$

$$U_\mu^{(\lambda)}(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\}) = \bigcup_{0\neq\varphi\in U_{\mu-1}^{(\lambda)}} (\varphi + V(m_{\lambda+\mu};\varepsilon_{\lambda+\mu};B_{\lambda+\mu})),\quad 1\leq\mu<\infty,$$

$$U^{(\lambda)}(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\}) = \bigcup_{0\leq\mu<\infty} U_\mu^{(\lambda)},$$

$$U(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\}) = \bigcup_{1\leq\lambda<\infty} U^{(\lambda)}.$$

On a le lemme suivant:

Lemme 3. $U(\{m_\lambda\};\{\varepsilon_\nu\}) = \bigcup_{1\leq\lambda<\infty} U_{(\lambda)}$, $U_{(\lambda)} = V(m_1;\varepsilon_1;B_1)+\cdots+V(m_\lambda;\varepsilon_\lambda;B_\lambda)$ *où* $V(m_1;\varepsilon_1;B_1)+\cdots+V(m_\lambda;\varepsilon_\lambda;B_\lambda)$ *signifie l'ensemble des toutes les fonctions qui peuvent être exprimé comme une somme des fonctions* $\varphi_j\in V(m_j;\varepsilon_j;B_j)$, $j=1,2,\cdots,\lambda$. *U est convexe et ouvert* $(\mathfrak{T})$.

Dénotons par $\hat{\mathfrak{T}}$ *la topologie de l'espace vectoriel qui a le système* $\{U\}$ *où* $m_\nu\to\infty$, $\varepsilon_\nu\to 0$, *comme le système fondamental des voisinages de la fonction* 0. *Alors* $\hat{\mathfrak{T}}$ *est une véritable-topologie localement convexe et qui est plus fine que* $\mathfrak{T}^*$;[5] *par suite* $\hat{\mathfrak{T}}=\mathfrak{T}^*$ *et elle est moins fine que* $\tilde{\mathfrak{T}}$.

Exemple 2. Soient $\{m^{(\nu)}\}$ une suite de nombres entiers croissante et $\{\varepsilon^{(\nu)}\}$ une suite des nombres >0 décroissante. Posons

$$W_0^{(\lambda)}(\{m^{(\nu)}\};\{\varepsilon^{(\nu)}\}) = V(m^{(\lambda)};\varepsilon^{(\lambda)};B_\lambda)$$

$$W_\mu^{(\lambda)}(\{m^{(\nu)}\};\{\varepsilon^{(\nu)}\}) = \bigcup_{0\neq\varphi\in W_{\mu-1}^{(\lambda)}} \left(\varphi + V\left(m^{(\lambda+\mu)};\frac{\sup|\varphi|}{5^\mu\left(1+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5^{\mu-1}}\right)};B_{\lambda+\mu}\right)\right),$$

$1\leq\mu<\infty$,

$$W^{(\lambda)}(\{m^{(\nu)}\};\{\varepsilon^{(\nu)}\}) = \bigcup_{0\leq\mu<\infty} W_\mu^{(\lambda)}(\{m^{(\nu)}\};\{\varepsilon^{(\nu)}\})$$

$$W(\{m^{(\nu)}\};\{\varepsilon^{(\nu)}\}) = \bigcup_{1\leq\lambda<\infty} W^{(\lambda)}(\{m^{(\nu)}\};\{\varepsilon^{(\nu)}\}).$$

En vertu du Lemme 2, W est ouvert $(\mathfrak{T})$ et $\{W\}$ definie une véritable-topologie.

Propriété de W; Soit $\varphi\neq 0$ une fonction quelconque appartenant à W, il existe deux nombres entiers λ_0 et μ_0 tels que $\varphi\in W_{\mu_0}^{(\lambda_0)}$. Donc, en vertu du Lemme 2, il existe des fonctions $\varphi_{\lambda_0},\varphi_{\lambda_0+1},\cdots,\varphi_{\lambda_0+\mu_0}$, telles que

$$\varphi = \varphi_{\lambda_0}+\varphi_{\lambda_0+1}+\cdots+\varphi_{\lambda_0+\mu_0},$$

où $0\neq\varphi_{\lambda_0}\in V(m^{(\lambda_0)};\varepsilon^{(\lambda_0)};B_{\lambda_0})$, $\varphi_{\lambda_0+\mu}\in V\left(m^{(\lambda_0+\mu)};\frac{\sup|\varphi_{\lambda_0}+\varphi_{\lambda_0+1}+\cdots+\varphi_{\lambda_0+\mu-1}|}{5^\mu\left(1+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5^{\mu-1}}\right)};B_{\lambda_0+\mu}\right)$, $1\leq\mu\leq\mu_0$.

Nous pouvons montrer facilemnet que, si $0\neq\varphi\in W$, il existe un nombre entier λ_0 tel que

5) $\mathfrak{T}^*$ signifie la véritable-topologie donnée par M. L. Schwartz, voir 1).

$(*)$ $\sup|D^p\varphi(x)|\leq(5/4)\varepsilon^{(\lambda_0)}$, si $|p|\leqq m^{(\lambda_0)}$, $0\neq\varphi\in W^{(\lambda_0)}$,

$(**)$ $(4/5)\sup|\varphi(x)|\leq\sup|\varphi_{\lambda_0}(x)|\leq(4/3)\sup_{x\in B_{\lambda_0}}|\varphi(x)|$, si $0\neq\varphi\in W^{(\lambda_0)}$.

Nous pouvons montrer aussi le lemme suivant:

Lemme 4. *Soit R^n l'espace euclidien de n dimensions. Quelque petit que un nombre $\varepsilon>0$ est, quelque grand un nombre $\alpha>0$ est, et quelque soit un nombre $\rho>0$, il existe une fonction $f(x)$ qui satisfait aux conditions*

$$f(x)\in(\mathcal{D}_{B_\rho}),\quad \sup|D^pf|<\varepsilon,\quad si\ 0\leq|p|\leq m-1,$$

et il existe un $p^{(0)}$ tel que $|p^{(0)}|=m$ et que $\sup|D^{p^{(0)}}f|>\alpha$.

Théorème 5. *Soit $\mathfrak{T}$ la pseudo-topologie de $(\mathcal{D})$ donnée par L. Schwartz. La véritable-topologie $\tilde{\mathfrak{T}}$ induite de $\mathfrak{T}$ est strictment plus fine que la véritable-topologie $\mathfrak{T}^*$ de $(\mathcal{D})$ donnée par L. Schwartz.*

Démonstration. D'après le Lemme 3, il suffit de montrer que $\tilde{\mathfrak{T}}$ est strictment plus fine que $\hat{\mathfrak{T}}$, si $m_\nu\to\infty$, $\varepsilon_\nu\to 0$. Considérons $W(\{m^{(\nu)}\};\{\varepsilon^{(\nu)}\})$ où $m^{(\nu)}\to\infty$, $\varepsilon^{(\nu)}\to 0$, alors c'est ouvert $(\mathfrak{T})$ (voir le Exemple 2) et contient la fonction 0, par suite, en vertu du Théorème 4 il est un voisinage $(\tilde{\mathfrak{T}})$ de 0. Supposons que $\hat{\mathfrak{T}}$ soit plus fine que $\tilde{\mathfrak{T}}$, alors il existe $U(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\})$ tel que

$$(1)\qquad U(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\})\subseteq W(\{m^{(\nu)}\};\{\varepsilon^{(\nu)}\}).$$

Puisque $m^{(\nu)}\to\infty$, $\varepsilon^{(\nu)}\to 0$, il existe un nombre entier $\nu_1>2$ tel que $m_1+1<m^{(\nu_1)}$. Posons $\eta_{\nu_1}=\min(\varepsilon_{\nu_1},\varepsilon^{(\nu_1)})$, $\rho=\sup_{\substack{\varphi\in V(m_{\nu_1};\eta_{\nu_1};B_{\frac{1}{3}})\\ x\in B_{\frac{1}{3}}}}|\varphi|$, il y a un nombre entier $k(>1)$ tel que $\rho>\varepsilon^{(\nu_1)}/k$, puisque $\rho>0$. Il existe une fonction $\varphi_0(x)$ telle que

(2) $\varphi_0(x)\in V(m_{\nu_1};\eta_{\nu_1};B_{\frac{1}{3}})$, $\sup|\varphi_0(x)|>\rho/2>\eta_{\nu_1}/2k$, et, en vertu du Lemme 4, il existe une fonction $f(x)$ qui satisfait aux conditions suivantes:

(3) $f(x)\in V(m_1;\eta_{\nu_1}/10k;B_{\frac{1}{3}})$ et il y a un nombre p_0 tel que $|p_0|=m+1$ et que $\sup|D^{p_0}f(x)|>2\varepsilon^{(1)}$. Posons

$$\psi(x)=f(x)+\varphi_0(x_1-\tfrac{1}{2}+\nu_1,\ x_2,x_3,\cdots,x_n).$$

Puisque $f(x)\in V(m_1;\varepsilon_{\nu_1};B_1)\subseteq V(m_1;\varepsilon_1;B_1)$, $K_{\varphi_0}(x_1-\frac{1}{2}+\nu_1,\ x_2,x_3,\cdots,x_n)\subseteq B_{\nu_1}-I(B_{\nu_1-1})$ et que $\varphi_0(x_1-\frac{1}{2}+\nu_1,\ x_2,\cdots,x_n)\in V(m_{\nu_1};\varepsilon_{\nu_1};B_{\nu_1})$, on a

$$\psi(x)\in V(m_1;\varepsilon_{\nu_1};B_{\nu_1})+V(m_{\nu_1};\varepsilon_{\nu_1};B_{\nu_1})\subseteq U^{(\nu_1)}(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\})\subseteq U(\{m_\nu\};\{\varepsilon_\nu\}).$$

Par conséquent, d'après (1) on a

$$\psi(x)\in\bigcup_\lambda W^{(\lambda)}(\{m^{(\nu)}\};\{\varepsilon^{(\nu)}\}).$$

Donc, il existe un nombre entier λ_0 tel que

$$\psi\in W^{(\lambda_0)}.$$

Quand $\lambda_0<\nu_1$, on a $B_{\lambda_0}\subseteq B_{\nu_1-1}$. Puisque $K_{\varphi_0}\frown B_{\lambda_0}$, en vertu de $(**)$

$$
\begin{aligned}
(4/5)\eta_{\nu_1}/2k &< (4/5)\,|\,\varphi_0(x_1-\tfrac{1}{2}+\nu_1,\ x_2, x_3, \cdots, x_n)\,| \\
&\leq (4/5)\,|\sup \psi(x)\,| < (4/3) \sup_{x\in B_{\lambda_0}} \psi(x) = (4/3)\sup|\,f(x)\,| \\
&\leq (4/3)\,\frac{\eta_{\nu_1}}{10k}.
\end{aligned}
$$

C'est une contradiction.

Quand $\lambda_0 \geq \nu_1$, on a $|p_0| = m+1 < m^{(\nu_1)} \leq m^{(\lambda_0)}$ et que, en vertu de (*),

$$\sup|\,D^{p_0}\psi(x)\,| \leq (5/4)\varepsilon^{(\lambda_0)}.$$

Puisque, $2\varepsilon^{(1)} < \sup|\,D^{p_0}f(x)\,|$ (voir (3)) et que $K_f \frown K_{\varphi_0} = \phi$, on a

$$2\varepsilon^{(1)} < \sup|\,D^{p_0}f(x)\,| \leq \sup|\,D^{p_0}\psi(x)\,| \leq (5/4)\varepsilon^{(\lambda_0)}.$$

C'est une contradiction.