14. *Ein Seitenstück der Relativitätstheorie als eine erweiterte Laguerresche Geometrie*

Von Tsurusaburo TAKASU

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 12, 1959)

In [3, 4] und [5] habe ich die folgenden zwei Tatsachen bewiesen: (i) In der allgemeinen Relativitätstheorie A. Einsteins, ist der Momentumvektor einer freien Partikel nicht tangentiell zur Bahn der Partikel; (ii) die verallgemeinerte Gravitationstheorie A. Einsteins [6] enthält einen Widerspruch. Aus diesem Grunde habe ich seine Theorie durch eine berichtigte Relativitätstheorie ersetzt [1–4], indem ich die II-geodätischen Kugelflächen (deren Radien II-geodätische Linien sind) als *Aktionsfunktionsfronten* als Raumelemente aufnahm. Die neue Theorie, welche Referent Prof. J. I. Horváth (Szeged) im "Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete" (1958) als ein Zulässiges referiert hat, war zuerst als eine *drei-dimensionale nicht-holonome Laguerresche Geometrie* [1, 2] und dann als eine *drei-dimensionale Laguerresche Hauptfaserbündelgeometrie* (der Hauptfaserraum (Strukturgruppe) aus Momentum-Potentialfeld bestehend) [3] und zuletzt, was wesentlich auf dasselbe hinauskommt, als eine *erweiterte drei-dimensionale Laguerresche Geometrie* so aufgefassen [4, Art. 8], dass die Geometrie im Erlanger Programm F. Kleins aufs neue Platz nimmt und der Raum, in welchem Phänomenen stattfinden, der drei-dimensionale euklidische Raum ist.

Was man in der Relativitätstheorie tut, ist eine Geometrisierung der Physik und die neue Theorie lässt sich auf zwei Weisen aufbauen: (i) auf Grund des *Prinzips der kleinsten Aktionsfunktion* (Wirkungsfunktion) $\delta s=0$ in der *Summenmannigfaltigkeit* [Raum-Zeit (x^i, t)] + [Momentum-Potential-feld $\{\omega^l_i(x^p), \omega^l_4(x^p)\}$], $(l, m, p=1,2,3,4;\ i=1,2,3)$, dessen Lösungen die Bahnen der freien Partikel sind, und (ii) auf Grund der ganz neuen *Prinzips der kleinsten Arbeit* $\delta s=0$ *in der Summenmannigfaltigkeit* [Raum-Zeit (x^i, t)] + [das Feld von Kraft-(Zeitgradiente des Potentials) $\{\omega^l_i(x^p), \omega^l_4(x^p)\}$], *dessen Lösungen die Kraftlinien sind.* Dabei sind (x^i) die Cartesischen Koordinaten, $x^4=t=$die Zeit und

$$ds^2=\omega^l\omega^l, \quad \omega^l \overset{\text{def}}{=} \omega^l_m(x^p)dx^m,$$

(i) $\omega^l_i(x^p)=$die Momentum-komponenten, $\omega^l_4(x^p)=$die Potentialkomponenten, $\omega^l=$Aktionskomponenten, $ds=$Aktion, $s=$Aktionsfunktion,

(ii) $\omega^l_i(x^p)=$die Kraft-komponenten, $\omega^l_4(x^p)=$die Komponenten der Zeitgradiente des Potentials, $\omega^l=$die Komponenten des Arbeitselementes, $ds=$das Reultantearbeitselement, $s=$Arbeit,

$$dr=\omega^4=\omega^4_m(x^p)(dx^m/dt)dt$$

$=E\,dt$, ($E=$die in Zeiteinheit von der Partikel emitierte Energie),	$=\overline{E}\,dt$, ($\overline{E}=$die in Zeiteinheit von der Partikel emitierte Zeitgradiente des Potentials),

$r=$der Radius der II-geodätischen Kugel, welche die

Aktionsfunktionsfronte ist.	*Energiefronte* ist.

In [1–4] und [5] habe ich die neue *berichtigte allgemeine Relativitätstheorie auf Grund des Prinzips* (i) *begründet.* Nun habe ich sein auf Grund des Prinzips (ii) begründetes *Seitenstück* entdeckt. Dies möchte ich im Folgenden entwickeln.

1. II geodätische Linien im euklidischen Raume E^n. Indem wir hyperkomplexe Einheiten γ_l derart, dass

(1.1) $$\gamma_p\gamma_q+\gamma_q\gamma_p=2\delta_{pq},\quad (p,q,\cdots=1,2,\cdots,n)$$

ist, aufnehmen, setzen wir

(1.2) $$dS=\gamma_l\omega^l,\quad \omega^l=\omega^l_m(x^p)dx^m,\quad (l,m,\cdots=1,2,\cdots,n),$$

wo (x^p) rechtwinklige Cartesische Koordinaten im E^n sind und

(1.3) $$|\omega^l_m|\neq 0$$

vorausgesetzt ist. Dann haben wir

(1.4) $$dSdS=ds^2=\omega^l\omega^l=g_{pq}dx^pdx^q,\quad ds=|dS|,$$

(1.5) $$g_{pq}=g_{\underline{pq}}+g_{\underset{\vee}{pq}},\quad g_{\underline{pq}}=\omega^l_p\omega^l_q=g_{\underline{qp}},\quad g_{\underset{\vee}{pq}}=\gamma_r\gamma_s\omega^r_p\wedge\omega^s_q=-g_{\underset{\vee}{qp}},$$

(1.6) $$g^{\underline{pq}}=\Omega^p_l\Omega^q_l,$$

(1.7) $$\Omega^p_l\omega^l_q=\delta^p_q,\quad \Omega^l_q\omega^p_l=\delta^p_q.$$

Wir nehmen durchaus an, dass der euklidische Raum E^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit von der Klasse C^ν (entweder $\nu=$ positive ganze rationale Zahle oder $\nu=\infty$ oder $\nu=\omega$) ist. Die Identität

(1.8) $$\frac{d}{ds}\frac{\omega^l}{ds}\equiv\omega^l_p\left(\frac{d^2x^p}{ds^2}+\Lambda^p_{rs}\frac{dx^r}{ds}\frac{dx^s}{ds}\right)$$

lässt sich leicht beweisen, wobei

(1.9) $$\Lambda^p_{rs}\overset{\text{def}}{=}\Omega^p_l\frac{\partial\omega^l_r}{\partial x^s}\equiv-\omega^l_r\frac{\partial\Omega^p_l}{\partial x^s}.$$

Die Lösung des Extremalproblems $\delta s=0$ in der Summenmannigfaltigkeit $(\omega^l_m(x^p),x^p)$ ist durch

(1.10) $$\frac{d}{ds}\frac{\omega^l}{ds}=0\rightleftarrows\frac{d^2x^p}{ds^2}+\Lambda^p_{rs}\frac{dx^r}{ds}\frac{dx^s}{ds}=0$$

gegeben. Das Intagral von (1.10) wird zu:

(1.11) $$\xi^l\overset{\text{def}}{=}\int(\omega^l/ds)ds=a^ls+c^l,\quad (a^la^l=1),$$

welche im E^n existiert. Wir nennen (1.11) die II-*geodätischen Linien* (lies: geodätische Linien zweiter Art). (1.10) wird zu

(1.12) $$d^2\xi^l/ds^2=0.$$

Die Gestalt (1.11) zeigt uns: *die* II-*geodätischen Linien gegenüber Projizieren und Schneiden sowie gegenüber Extremalproblem*

$\delta s=0$ *im* $(\omega^l_m(x^p), x^p)$ (d.h. im (ξ^l)) *sich wie gerade Linien verhalten.*

Aus (1.10) kann man ohne Schwierigkeiten herleiten:

(1.13) $$dx^p/ds=a^l\Omega^p_l \quad \textit{der II-geodätischen Linien entlang.}$$

2. Die erweiterte euklidische Transformationsgruppe. Die Formeln (1.11) und (1.2) zeigen uns:

(2.1) $$d\xi^l=\omega^l_m(x^p)dx^m.$$

Die Koordinaten (ξ^l) möchte ich die II-*geodätischen rechwinkligen Koordinaten* nennen. Dabei ist $(\omega^l_m(x^p))$ eine Orthogonalmatrix, welche $nC_2+n=n(n+1)/2$ *Orthogonalitätsbedingungen* genügen. (2.1) gibt

$$\xi^l=\int a^l_m(x^p)dx^m=a^l_m(x^p)x^m-\int x^m da^l_m(x^p), \quad (\omega^l_m=a^l_m),$$

welche von der Gestalt

(2.2) $$\xi^l=a^l_m(x^p)dx^m+a^l_0, \quad (a^l_0=\text{konst.})$$

ist, weil *die Gleichung der Struktur* [4, Formel (2.3)] zu

(2.3) $$\boldsymbol{d}\omega^l=da^l_m(x^p)\wedge dx^m=0$$

der II-geodätischen Linien entlang wird, so dass

(2.4) $$\int x^m da^l_m(x^p)=\int a^l_m(x^p)\int dx^m=\iint\{da^l_m(x^p)\wedge dx^m\}=a^l_0=\text{konst.}$$

Die *erweiterte euklidische Gruppe* $(a^l_m(x^p), a^l_0)$ bildet eine Gruppenmannigfaltigkeit. *Die aus* $(a^l_m(x^p), a^l_0)$ *bestehende Gruppe* $\mathfrak{G}$ *enthält eine aus* $(n(n+1)/2)$*-parametrigen euklidischen Transformationen mit konstanten Parametern bestehende euklidische Gruppe* $\mathfrak{E}$.

Wir können die Untergruppe $\mathfrak{H}$ derart auffassen, dass

(2.5) $$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{E}=\mathfrak{E}\mathfrak{H}.$$

Wir bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{h}_0=1$, $\mathfrak{h}_i$, $(i=1,2,\cdots)$: $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}_0+\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2+\cdots$. Dann ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{h}_0\mathfrak{E}+\mathfrak{h}_1\mathfrak{E}+\cdots=\mathfrak{E}\mathfrak{h}_0+\mathfrak{E}\mathfrak{h}_1+\cdots$. Die $\mathfrak{G}$ wollen wir die *durch* $\mathfrak{H}$ *erweiterte euklidische Gruppe* nennen.

Die Gleichung der Struktur (2.3) lässt sich aus (1.10) folgendermassen herleiten. Nämlich

$$\frac{\partial a^l_p}{\partial x^q}=\delta^l_s\frac{\partial a^s_p}{\partial x^q}=a^l_t\Omega^t_s\frac{\partial a^s_p}{\partial x^q}.$$

Indem wir die beiden Seiten durch $\dfrac{dx^p}{ds}\dfrac{dx^q}{dt}$ multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{da^l_p}{ds}\frac{dx^p}{ds}+a^l_p\frac{d^2x^p}{ds^2}=0, \quad \left(\frac{d^2x^p}{ds^2}=0 \text{ für gerade Linien}\right),$$

welche eine Folge von $\omega^l=a^l_m dx^m=a^l ds$ ist. Die (ξ^l) lassen sich mittels der (x^p) folgendermassen darstellen [3, Umkehrung von (8.4)]:

(2.6) $$\xi^l=p^l+a^l_m(p^q)x^m-\frac{1}{2\,!}K^l_{st}(p^q)x^s x^t-\frac{1}{3\,!}K^l_{stu}(p^q)x^s x^t x^u-\cdots,$$

wo $\xi^l=p^l\ (x^p=0)$, $\dfrac{\partial\xi^l}{\partial x^p}=p^l_p\ (x^p=0)$.

3. Erweiterte Laguerresche Geometrie. Wir haben die folgende Zuordnung:

Erweiterter euklidischer Raum $\mathcal{E}^{n+1}$	erweiterter Laguerrescher Raum $\mathfrak{L}^n$
Punkt (ξ^p, ξ^{n+1}), $(p=1, 2, \cdots, n)$	orientierte II-geodätische Hyperkugel mit Zentrum (ξ^p) und II-geodätischem Radius $r=-i\xi^{n+1}$, $(p=1, 2, \cdots, n)$

Setzt man

(3.1) $$dS=\gamma_l d\xi^l, \quad (dSdS=ds^2), \quad (l=1, 2, \cdots, n+1),$$

so ist ds der tangentielle II-geodätische Abstand zweier konsekutiver II-geodätischer Hyperkugeln.

Wenn die zweite II-geodätische Hyperkugel in der ersten liegt, dann wird ds^2 rein imaginär und dS^2 derart, dass $dS^2=-ds^2$, wird reell.

4. Ein Seitenstück zur berichtigten Relativitätstheorie T. Takasus, welcher sich auf das Prinzip der kleinsten Arbeit in der Summenmannigfaltigkeit $\{a^l_m(x^p), x^p\}$ beruht. Wir können das *Prinzip der kleinsten Arbeit* in der Summenmannigfaltigkeit $\{a^l_m(x^p), x^p\}$, $(l, m, p, \cdots =1, 2, 3, 4)$ auf die folgende Weise begründen. Wenn in den Ausdrücken

(4.1) $$dS=\gamma_l\omega^l, \quad (\omega^l=\omega^l_m(x^p)dx^m),$$

(4.2) $$dSdS=ds^2=\omega^l\omega^l,$$

ω^l_1, ω^l_2 und ω^l_3 die Kraftkomponenten und ω^l_4 die Komponenten der Zeitgradiente des Potentials darstellen, dann ist

(4.3) $$\omega^l = a^l ds, \quad (a^l a^l=1)$$

die Lösung des *Prinzips der kleinsten Arbeit*

(4.4) $$\delta s = 0$$

und die ersten drei Komponenten von

(4.5) $$\xi^l \overset{\text{def}}{=} \int (\omega^l/ds)ds=a^l s+c^l$$

stellen die *Gleichungen der Kraftlinien* dar, wobei ξ^l sich durch (2.6) mittels der Cartesischen Koordinaten x^p darstellen lassen.

Die ω^l sind die Komponenten des Arbeitselementes. r derart, dass

(4.6) $$dr = \omega^4,$$

stellt den II-*geodätischen Radius der* II-*geodätischen Energiefrontenkugel* dar.

Die dem Prinzip der kleinsten Arbeit entsprechende Geometrie ist die drei-dimensionale erweiterte Laguerresche Geometrie.

5. Beziehung des genannten Seitenstücks zur ursprünglichen Relativitätstheorie. Da die Kraft und die Zeitgradiente des Potentials durch Differenzierung vom Momentum bzw. vom Potential nach Zeit entsteht, erhalten wir die folgende Zuordnung:

Ursprüngliche Relativitätstheorie	das genannte Seitenstück
Momentum, Potential	Kraft, Zeitgradiente des Potentials
$\tilde{\omega}^l=\tilde{\omega}^l_m(x^p)dx^m, \quad \tilde{\omega}^l_m(x^p),$	$\omega^l=\dfrac{d\tilde{\omega}^l_m(x^p)}{dt}dx^m, \quad \omega^l_m(x^p)=\dfrac{d\tilde{\omega}^l_m(x^p)}{dt},$
$d\tilde{s}^2=\tilde{\omega}^l\tilde{\omega}^l$	$ds^2=\left(d\dfrac{d\tilde{s}}{dt}\right)^2=\dfrac{d\tilde{\omega}^l_m(x^p)}{dt}\dfrac{d\tilde{\omega}^l_m(x^p)}{dt}$

6. Verifizierung des genannten Seitenstücks mittels der klassischen Physik

1°. Zentralkraft. Man bezeichne das Differenzieren nach Zeit durch Punkte. Dann ist die *ρ-Komponente der aus dem Koordinatenursprüng auf eine Partikel mit Masseneinheit wirkenden Zentralkraft* durch das folgende gegeben:

(1) $$\ddot{\rho}-(\rho\dot{\varphi})^2/\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2.$$

Die *Quergeschwindigkeit* (d.h. zweimal die Flächengeschwindigkeit $2A$) ist $\rho^2\dot{\varphi}$, so dass die *Querbeschleunigung* (d.h. die φ-Komponente der Beschleunigung) $d(\rho^2\dot{\varphi})/dt$ ist und also ist die *$(\rho\varphi)$-Komponente der Zentralkraft* durch

(2) $$\rho^{-1}d(\rho^2\dot{\varphi})/dt$$

gegeben, da $(d(\rho^2\dot{\varphi})/dt)d\varphi=\rho^{-1}\cdot(d(\rho^2\dot{\varphi})/dt)\cdot(\rho d\varphi)$ ist.

Es sei $\sqrt{\gamma(\rho)}$ die aus der Partikel wirkende Radialkraft. Dann für

(3) $$dS=\gamma_l\omega^l=\gamma_l a^l ds,\quad (dSdS=ds^2=\omega^l\omega^l),$$

haben wir

(4) $$\omega^1=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)d\rho=a^1ds,$$

(5) $$\omega^2=\rho^{-1}\{d(\rho^2\dot{\varphi})/dt\}(d\varphi)=\{d(\rho^2\dot{\varphi})/dt\}d\varphi=a^2ds,$$

(6) $$\omega^3=\{d(\sqrt{\gamma(\rho)})/dt\}dt=\{d\sqrt{\gamma(\rho)}/d\rho\}\dot{\rho}dt=a^3ds,$$

wo die Beziehung

(7) $$(a^1)^2+(a^2)^2-(a^3)^2=1$$

besteht. Da es keine $(\rho\varphi)$-Komponente der Kraft wirkt, stellt (5) das Gesetzt der Fläche dar:

(8) $$\rho^2(d\varphi/dt)=2A=\text{konst.},$$

so dass

(9) $$\rho\dot{\varphi}^2=4A^2/\rho^3,\quad \ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2=\ddot{\rho}-4A^2/\rho^3.$$

Aus (4), (6) und (9) ergibt sich $(\ddot{\rho}-4A^2/\rho^3)/(d\sqrt{\gamma(\rho)}/d\rho)=a^1/a^3$, nämlich

(10) $$\ddot{\rho}-4A^2/\rho^3-(a^1/a^3)d\sqrt{\gamma(\rho)}/d\rho=0.$$

Multipliziert man (10) durch $\dot{\rho}$ und integriert man das Resultat, so folgt

(11) $$\dot{\rho}^2/2+2A^2/\rho^2-(a^1/a^3)\sqrt{\gamma(\rho)}=K=\text{konst.},$$

wo nach (8) gilt:

(12) $$2A^2/\rho^2=(\rho\dot{\varphi})^2/2.$$

(11) stell das *Gesetz der Energieerhaltung* dar.

Multipliziert man (4) durch $\dot{\rho}$ und integriert das Resultat, so folgt

(13) $$\dot{\rho}^2/2+2A^2/\rho^2=\dot{\rho}^2/2+(\rho\dot{\varphi})^2/2=a^1(s-s_0)/2.$$

Aus (6) ergibt sich

(14) $$\sqrt{\gamma(\rho)}=a^3(s-s_0).$$

Vergleicht man (11), (12), (13) und (14), so überzeugt man sich damit dass sie kompatibel sind.

(13) und (14):

$$(15)\quad \int(\ddot{\rho}-4A^2/\rho^3)d\rho=a^1(s-s_0),\quad \int d\sqrt{\gamma(\rho)}=a^3(s-s_0),\quad ((a^1)^2-(a^3)^2=1)$$

sind die *Gleichungen der Kraftlinien.*

Das ertste Integral von (15) ist (13) und (14), so dass für die Kraftlinien wir haben:

$$(16)\qquad \dot{\rho}^2+4A^2/\rho^2=(a^1/a^3)\sqrt{\gamma(\rho)},\quad \dot{\varphi}=2A/\rho^2$$

d.h.

$$(17)\qquad \begin{aligned} &d[\rho\{a^1/a^3)\sqrt{\gamma(\rho)}-4A^2/\rho^2\}^{-\frac{1}{2}}]=dt=(\rho^2/2A)d\varphi,\\ &\int \rho^{-2}d[\rho\{(a^1/a^3)\sqrt{\gamma(\rho)}-4A^2/\rho^2\}^{-\frac{1}{2}}]=(\varphi-\varphi_0)/2A. \end{aligned}$$

2°. Wie bekannt ist, stellen die Formeln

$$(18)\qquad \begin{cases} \xi^1\overset{\text{def}}{=}\varphi=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left\{(\varphi_x+\psi_y)\frac{dx}{ds}-(\psi_x-\varphi_y)\frac{dy}{ds}\right\}ds=a^1s+c^1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ((a^1)^2+(a^2)^2=1), \\ \xi^2\overset{\text{def}}{=}\psi=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left\{(\psi_x-\varphi_y)\frac{dx}{ds}+(\varphi_x+\psi_y)\frac{dy}{ds}\right\}ds=a^2s+c^2, \end{cases}$$

welche sich aus $f(z)=\int(df/dz)dz$, $(f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$: analytische Funktion von $z=x+iy$) ergeben, II-geodätische Linien dar. Wenn man die Komponenten (X, Y) der Kraft derart betrachtet, dass

$$(19)\qquad X=(\varphi_x+\psi_y)/2,\qquad Y=(\varphi_y-\psi_x)/2,$$

so sind $(\xi^1, \xi^2)=(\varphi, \psi)$ die Komponenten der Energie und (18) *samt* (2.6) *stellt die Kraftlinien dar* als die Lösung des *Prinzips der kleinsten Arbeit*:

$$\delta s=\tfrac{1}{2}\int[(Xdx+Ydy)^2+(-Ydx+Xdy)^2]^{\frac{1}{2}}=0.$$

Die zwei Beispiele 1° *und* 2° *sowie viele andere unterstützen unser Prinzip der kleinsten Arbeit.*

Referenzen

[1] T. Takasu: Non-conjectural theory of relativity as a non-holonomic Laguerre geometry realized in the three-dimensional torsioned Cartesian space fibered with actions, Proc. Japan Acad., **31**, 606–609 (1955).

[2] T. Takasu: Non-conjectural theory of relativity as a non-holonomic Laguerre geometry realized in the three-dimensional Cartesian space fibered with non-holonomic actions, Yokohama Math. J., **3**, 1–52 (1955). (Siehe dortige Berichtigung).

[3] T. Takasu: Die endgültige, kugelgeometrische Relativitätstheorie, welche als eine Faserbündelgeometrie aufgefasst ist, Yokohama Math. J., **4**, 119–146 (1956).

[4] T. Takasu: Erweiterung des Erlanger Programms durch Transformationsgruppenerweiterungen, Proc. Japan Acad., **34**, 471–476 (1958).

[5] T. Takasu: Eine Ergänzung zu: T. Takasu, Die endgültige, kugelgeometrische Relativitätstheorie, welche als eine Faserbündelgeometrie aufgefasst ist, Yokohama Math. J., **4**, 7 (1956); **6**, 89 (1958).

[6] A. Einstein: The Meaning of Relativity, 5th ed., Princeton (1956), Appendix II.