34. *Eine Eigenschaft des topologischen Schnittringes*

Von Joseph WEIER

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., April 13, 1959)

Bezeichne E einen euklidischen Raum positiver Dimension. Die weiterhin benutzten Simplexe aus E sind gradlinig und hinsichtlich ihrer Trägerebene offen. Eine geschlossene topologische Mannigfaltigkeit in E, die Vereinigungsmenge endlich vieler solcher Simplexe ist, heisse euklidisch. Sei P eine geschlossene euklidische Mannigfaltigkeit in E. Sind dann C_1, C_2 in P gelegene endliche ganzzahlige Ketten mit

$$\dim C_1 + \dim C_2 \geq \dim P,$$

$$|\partial C_1| \cap |C_2| = 0 \quad \text{und} \quad |C_1| \cap |\partial C_2| = 0,$$

so bestimmt (vergleiche [1], [4] oder [8]) das Paar (C_1, C_2) eine ganzzahlige endliche Homologieklasse H mit $\dim H = \dim C_1 + \dim C_2 - \dim M$. Befinden sich C_1 und C_2 zueinander in allgemeiner Lage, so bestimmt (C_1, C_2) eindeutig einen Zyklus C_{12} mit $C_{12} \in H$. Wie man [4] oder [9] entnimmt, ist

$$C_{12} \sim 0,$$

wenn $C_1 = \partial D_1$ und $\partial C_2 = 0$ oder $\partial C_1 = 0$ und $C_2 = \partial D_2$ gilt, wobei die D_i Ketten aus M bedeuten.

Seien nun m, n natürliche Zahlen mit $m \geq 2n$, weiter M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale orientierte zusammenhängende geschlossene euklidische Mannigfaltigkeit, ferner $f: M \to N$ eine stetige Abbildung. Dann bestimmt, wie unten auseinandergesetzt ist, f ein System von ganzzahligen endlichen Zyklen

$$z_{ij}, \quad i=1, \cdots, r, \quad j=1, \cdots, r,$$

der Dimension $m-2n+1$, die die Eigenschaften haben: *ist $z_{ij} \nsim 0$ für wenigstens ein Paar (i, j), so ist f wesentlich; liegt f' in der gleichen Homotopieklasse wie f und bilden die ganzzahligen endlichen $(m-2n+1)$-Zyklen*

$$z'_{ij}, \quad i=1, \cdots, r', \quad j=1, \cdots, r',$$

das zu f' gehörige System und ist etwa $r \leq r'$, so kann man jedem z_{ij} derart eineindeutig ein $z'_{\varphi(i,j)}$ zuordnen, dass $z_{ij} \sim z'_{\varphi(i,j)}$ für alle $(i, j) \leq (r, r)$ und dass sämtliche Zyklen z'_{ij}, die nicht Bild eines Zyklus z_{ij}, nullhomolog sind.

Zur Erklärung der z_{ij} seinen a ein Punkt aus N und $f^{-1}(a)$ ein endliches $(m-n)$-Polyeder A, weiter $A_1, A_2, \cdots$ die Komponenten von A. Sind A^1, A^2 zwei, nicht notwendig verschiedene, der Polyeder A_i und existiert eine Kurve c^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, in M mit $c^0 \in A^1$ und $c^1 \in A^2$ derart, dass die geschlossene Kurve $f(c^\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, innerhalb N nullhomolog ist, so mögen A^1 und A^2 zur gleichen Klasse hinsichtlich (f, a) gehören. Auf diese Weise werden die A_i zu, im allgemeinen grösseren, Polyedern

$$B_1, B_2, \cdots, B_r$$

zusammengefasst. Seien K_i eine simpliziale Zerlegung von B_i, x_{ij} die mit einer Orientierung versehenen $(m-n)$-Simplexe von K_i und μ_{ij} die wie üblich (vergleich etwa [10]) definierte Multiplizität von x_{ij} bezüglich (f, a), dann ist $\sum_j \mu_{ij}x_{ij}$ ein endlicher ganzzahliger $(m-n)$-Zyklus z_i. Die Zyklen

$$z_1, z_2, \cdots, z_r$$

sind also durch (f, a) bis auf Unterteilungen eindeutig fastgelegt. Jedes z_i liegt über B_i. Und es gilt: ist $z_j \not\sim 0$ für wenigstens eine Zahl j, so ist f wesentlich.

Aus z_i und z_j bestimmt sich der oben in Rede stehende $(m-2n+1)$-Zyklus z_{ij} wie folgt. Für $i=j$ ist $z_{ij}=0$. Ebenso ist $z_{ij}=0$, wenn gleichzeitig $z_i \not\sim 0$ und $z_j \not\sim 0$. Sei nun

$$z_i \sim 0.$$

Zwei ganzzahlige endliche $(m-n+1)$-Ketten x_1 und x_2 aus M mit

$$\partial x_1 = \partial x_2 = z_i$$

mögen äquivalent bezüglich z_i heissen, wenn $x_1 - x_2 \sim 0$. Dadurch zerfällt die Menge aller $(m-n+1)$-Ketten x, die $\partial x = z_i$ erfüllen, in endlich viele Aequivalenzklassen

$$Y_1, Y_2, \cdots \quad .$$

Hierauf sei y_k eine $(m-n+1)$-Kette aus Y_k, die sich zu z_j in allgemeiner Lage befindet und z_{ij} der durch

$$\sum y_k \quad \text{und} \quad z_j$$

bestimmte $(m-2n+1)$-dimensionale ganzzahlige endliche Schnittzyklus. Im Fall

$$z_i \not\sim 0 \quad \text{und} \quad z_j \sim 0$$

ist z_{ij} entsprechend zu erklären.

Die hinsichtlich M und N vorangestellten Voraussetzungen lassen sich abschwächen. Zunächst kann man, um etwa den Fall nicht orientierter Mannigfaltigkeiten zu erfassen, den Koeffizientenbereich der ganzen Zahlen durch anderer Bereiche ersetzen. Zur Frage, wie sich dabei der Schnitt modifiziert, vergleiche man zum Beispiel [5] und [11]. Interessanter als dieses Problem aber ist die Frage, wie sich die obigen Sätze in topologische Mannigfaltigkeiten übertragen lassen. Methoden, die hier anwendbar werden, entnimmt man etwa [2], [3] und [6]. Erinnert sei an ein topologisches Ordnungsprinzip aus [7], auf das die obige Klassendefinition zurückgeht. Die Frage, ob man die oben erklärten Homologieklassen z_i durch Homotopieklassen ersetzen kann, ohne die Invarianz zu verletzen, ist zu verneinen.

Referenzen

[1] Alexander, J. W.,: On the intersection invariants of a manifold, Proc. Nat. Acad. U. S. A., **11**, 143-146 (1925).

[2] Eilenberg, S.,: Singular homology theory, Ann. Math., **45**, 407-447 (1944).

[3] Flexner, W. W.,: The Poincaré duality theorem for topological manifolds, Ann. Math., **32**, 539-548 (1931).

[4] Lefschetz, S.,: Intersections and transformations of complexes and manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., **28**, 1-29 (1926).

[5] Mayer, W.,: On products in topology, Ann. Math., **46**, 29-57, speziell 54-57 (1945).

[6] Mayer, W.,: Singular chain intersection, Ann. Math., **47**, 767-778 (1946).

[7] Nielsen, J.,: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta Math., **50**, 189-358 (1927); **53**, 1-76 (1929).

[8] Reidemeister, K.,: Topologie der Polyeder, Math. und ihre Anwendungen, **17**, 130-151 (1953).

[9] De Rham, G.,: Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions, Jour. Math., **10**, 115-200 (1931).

[10] Weier, J.,: Sur une propriété des représentations de variétés en variétés, C. R. Acad. Sci., Paris, **239**, 1111-1113 (1954).

[11] Whitney, H.,: On products in a complex, Ann. Math., **39**, 397-432, speziell 420-424 (1938).