# 136. Ueber Transformation von Kompakten in die Sphäre

Von Joseph WEIER

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1959)

Sind $A$ ein kompakter metrischer Raum, $A_1$ eine abgeschlossene Teilmenge von $A$, $B$ eine Gerade und $f$ eine stetige Abbildung von $A_1$ in $B$, so existiert nach einem bekannten Theorem [4] eine stetige Fortsetzung von $f$ über $A-A_1$. Diser Satz lässt sich in verschiedener Richtung verschärfen. Zum Beispiel kann man $B$ durch einen lokal konvexen linearen Raum ersetzen, wie in [1] gezeigt wird. Andere Wege zur Verallgemeinerung des vorgenannten Theorems werden in [2] und [5] beschritten. In der vorliegenden Arbeit werden Abwandlungen des in Rede stehenden Theorems herangezogen, um folgenden Satz zu beweisen:

*Sind $C$ ein kompakter metrischer Raum, $S$ eine Sphäre, $g$ eine wesentliche Abbildung von $C$ in $S$ und $h$ eine unwesentliche Abbildung von $C$ in $S$, so hat die Gleichung $g(p)=h(p)$ wenigstens eine Lösung.*

1. Sind $A$, $B$ metrische Räume, $\{f^\tau\}$ eine Homotopie stetiger Abbildungen von $A$ in $B$ und $f^1(A)$ ein Punkt, so heisse $f^0$ nullhomotop. Die weiterhin auftretenden Simplexe sind offen und gradlinig. Wenn $C_1, C_2, \cdots$ endlich viele solcher Simplexe aus dem euklidischen Raume $E$ sind, so heisse $\sum \bar{C}_i$ ein endliches Polyeder. Wenn $D_1$, $D_2$ Teilmengen von $E$, so bedeute $d(D_1, D_2)$ den Abstand dieser Mengen und $d(D_1)$ den Durchmesser von $D_1$.

In [6] habe ich bewiesen:

**Satz 1.** *Sind $A$ ein kompakter metrischer Raum, $A_1$ eine abgeschlossene Teilmenge von $A$, $B$ eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit und $f$ eine stetige Abbildung von $A_1$ in $B$, so existieren eine in $A$ offene Menge $U$ mit $A_1 \subset U$ und eine stetige Fortsetzung von $f$ über $U-A_1$.*

Wir wollen weiter zeigen:

**Satz 2.** *Seien $A$ eine kompakte Menge in dem euklidischen Raume $E$, $B$ eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit und $f$ eine unwesentliche Abbildung von $A$ in $B$. Dann existieren eine in $E$ offene Menge $U$ mit $A \subset U$ und eine unwesentliche Abbildung $f'$ von $U$ in $B$ mit $f' \mid A = f \mid A$.*

Beweis. Seien $n$ die Dimension von $E$ und $E_1$ die Menge aller Punkte $p=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ aus $E$ mit $\alpha_n=0$. Dann kann man weiterhin annehmen, dass $A \subset E_1$. Für $0 \leq \tau \leq 1$ sei $A^\tau$ die Menge aller Punkte $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ aus $E$ mit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, 0) \in A$ und $\alpha_n = \tau$. Da $f$ unwesentlich ist, gibt es eine stetige Abbildung $\varphi$ von $\sum A^\tau$ in $B$ mit $\varphi \mid A^0 = f$ und

$\varphi \mid A^1 = b$, wobei $b$ ein Punkte $\in B$.

Nach Satz 1 existieren eine in $E$ offene Menge $V$ mit $\sum A^\tau \subset V$ und eine stetige Abbildung $\varphi'$ von $V$ in $B$ mit $\varphi' \mid \sum A^\tau = \varphi \mid \sum A^\tau$.

Für jedes $\tau$ sei $\varepsilon^\tau$ die grösste positive Zahl derart, dass die offene $\varepsilon^\tau$-Umgebung von $A^\tau$ in $V$ liegt. Aus min $(\varepsilon^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1) = 0$ folgte die Existenz einer Zahl $\alpha$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\varepsilon^\alpha = 0$. Wegen $\varepsilon^\alpha > 0$ gibt es daher eine positive Zahl $\varepsilon$, so dass für alle $\tau$ die offene $\varepsilon$-Umgebung von $A^\tau$ in $V$ liegt.

Somit existiert eine in $E$ offene Menge $W$ mit $A \subset W$ und der Eigenschaft: entsteht $W^\tau$ aus $W$ dadurch, dass man $W$ um den Vektor $(0, \cdots, 0, \tau)$ verschiebt, so liegt $W^\tau$ in $V$.

Hieraus folgt weiter: es gibt eine in $E$ offene Menge $X$ mit $A \subset X$ und eine Homotopie $\{f^\tau\}$ stetiger Abbildungen von $X$ in $B$ derart, dass

$$f^0 \mid A = f \quad \text{und} \quad f^1(A) = b.$$

Es bedeute $C$ eine in $B$ offene Menge, die zu einem Simplex homöomorph ist und $b \in C$ erfüllt.

Wegen $f^1(A) = b$ existiert eine in $E$ offene Menge $U$ mit $A \subset U \subset X$ und $f^1(U) \subset C$. Setzt man dann $f' = f^1/U$, so ist $f'$ wegen $f^1(U) \subset C$ unwesentlich.

**2.** Sind $A$ eine kompakte Teilmenge des euklidischen Raumes $E$ und $U$ eine in $E$ offene Menge mit $A \subset U$, so existiert offenbar ein endliches Polyeder $B$ mit $A \subset B \subset U$. Wir wollen zeigen:

**Satz 3.** *Seien $P, Q$ zusammenhängende endliche Polyeder, $f$ eine nullhomotope Abbildung von $P$ in $Q$ und $g$ eine wesentliche Abbildung von $P$ in $Q$. Dann hat die Gleichung $f(p) = g(p)$ wenigstens eine Lösung.*

Beweis. Ist $n$ die Dimension von $Q$, so existieren ein in $Q$ gelegenes $n$-Simplex $S$, ein Punkt $a$ in $S$ und eine Homotopie $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen von $P$ in $Q$ mit $f^0 = f$ und $f^1(P) = a$. Hierauf wollen wir die Annahme, es sei $f^0(p) \neq g(p)$ in allen Punkten $p$ aus $P$ auf einen Widerspruch führen.

Hierzu seien zunächst $S_0$, $S_1$ zwei $n$-Simplexe mit $a \in S_1$, $\bar{S}_1 \subset S_0$ und $\bar{S}_0 \subset S$, ferner $\delta$ die Zahl $\frac{1}{2} \min (d(S_0, \bar{S}_1 - S_1),\ d(S_1, \bar{S} - S))$ und

$$0 = \alpha_0 < \cdots < \alpha_m = 1$$

Zahlen, so dass für alle Punkte $p$ aus $P$ die Kurve $(f^\tau(p),\ \alpha_i \leq \tau \leq \alpha_{i+1})$ einen Durchmesser $< \delta$ hat.

Sind $j$ eine der Zahlen $0, \cdots, m-1$, ferner $\alpha = \alpha_j$ und $\beta = \alpha_{j+1}$, so setzen wir weiterhin voraus, es existiere eine zu $g$ homotope Abbildung $g^\alpha$ derart, dass

$$f^\alpha(p) \neq g^\alpha(p) \tag{1}$$

in jedem Punkte $p \in P$, für den gleichzeitig $f^\alpha(p) \in \bar{S}_1$ und $g^\alpha(p) \in \bar{S}_1$. Diese Voraussetzung ist für $j = 0$ richtig.

Für $p\in P$ werde die aus den Punkten $f^{\tau}(p)$, $\alpha\leq\tau\leq\beta$, bestehende Menge mit $F(p)$ bezeichnet. Sei $U$ die Menge aller Punkte $p$ aus $P$, für die gleichzeitig

$$F(p)\in S_0 \quad \text{und} \quad g^{\alpha}(p)\in S_1. \tag{2}$$

Die Menge $U$ ist in $P$ offen. Zum Beweis, dass

$$f^{\alpha}(p)\neq g^{\alpha}(p) \quad \text{für} \quad p\in \overline{U}, \tag{3}$$

sei erstens $f^{\alpha}(p)\in \bar{S}_1$. Dann ist $f^{\alpha}(p)\neq g^{\alpha}(p)$ wegen (1). Wenn zweitens $f^{\alpha}(p)\notin \bar{S}_1$, so ist $f^{\alpha}(p)\neq g^{\alpha}(p)$ wegen $g^{\alpha}(p)\in\bar{S}_1$.

Wegen $g^{\alpha}\overline{U})\subset\bar{S}_1$ und $d(\bar{S}_1, \bar{S}-S)>\delta$ ist

$$d(g^{\alpha}(p), \bar{S}-S)>\delta \quad \text{für} \quad p\in\overline{U}. \tag{4}$$

Zum Beweis, dass für $p\notin\overline{U}$ entweder

$$F(p)\cdot\bar{S}_1=0 \quad \text{oder} \quad g^{\alpha}(p)\notin\bar{S}_1, \tag{5}$$

sei zunächst bemerkt, dass wegen (2) für $p\in\overline{U}$ gleichzeitig $F(p)\subset\bar{S}_0$ und $g^{\alpha}(p)\in\bar{S}_1$. Für $p\notin\overline{U}$ ist also entweder

$$F(p\cdot S_0=0 \quad \text{oder} \quad F(p)\cdot(\bar{S}_0-S_0)\neq 0 \quad \text{oder} \quad g^{\alpha}(p)\notin\bar{S}_1.$$

Wenn $F(p)\cdot\bar{S}_0=0$, so ist erst recht $F(p)\cdot\bar{S}_1=0$. Wegen $d(F(p))<\delta$ und $d(S_0, \bar{S}_1-S_1)>\delta$ folgt aus $F(p)\cdot(\bar{S}_0-S_0)\neq 0$, dass $F(p)\cdot\bar{S}_1=0$.

Somit existiert eine in $P$ offene Menge $V$ mit $\overline{U}\subset V$ derart, dass in sämtlichen Punkten $p\in\overline{V}$ gleichzeitig

$$f^{\alpha}(p)\neq g^{\alpha}(p),\ F(p)\subset S \quad \text{und} \quad g^{\alpha}(p)\in S.$$

Für $p\in\overline{V}$ sei $\zeta(p)$ die Zahl $d(p, U)/(d(p, U)+d(p; \overline{V}-V))$, weiter $h(p)$ jener Punkt auf dem Halbstrahl aus $f^{\alpha}(p)$ durch $g^{\alpha}(p)$, der von $f^{\alpha}(p)$ den Abstand $\delta$ hat. Schliesslich sei

$$g^{\beta}(p)=(1-\zeta(p))h(p)+\zeta(p)g^{\alpha}(p) \quad \text{für} \quad p\in\overline{V}$$

und $g^{\beta}\,|\,P-V=g^{\alpha}\,|\,P-V$. Bezeichnet dann $U'$ die Menge aller Punkte $p\in P$, für die gleichzeitig $f^{\beta}(p)\in\bar{S}_1$ und $g^{\beta}(p)\in\bar{S}_1$, so ist wegen (5) zunächst $U'\subset U$. Also $g^{\beta}(p)=h(p)$ für $p\in U'$. Mithin $f^{\beta}(p)\neq g^{\beta}(p)$ für alle Punkte $p\in P$, für die gleichzeitig $f^{\beta}(p)\in\bar{S}_1$ und $g^{\beta}(p)\in\bar{S}_1$.

Es existiert also eine zu $g$ homotope Abbildung $g^1$, so dass $f^1(p)\neq g^1(p)$ in allen Punkten $p\in P$, für die gleichzeitig $f^1(p)\in\bar{S}_1$ und $g^1(p)\in\bar{S}_1$. Nun ist $f^1(P)=a$. Mithin $a\neq g^1(p)$ für alle $p\in P$. Daher ist $g^1$ unwesentlich in Widerspruch zur Wesentlichkeit von $g$.

3. Sind $A$ ein kompakter metrischer Raum, $B$ eine Sphäre, $f$ eine wesentliche Abbildung von $A$ in $B$ und $g$ eine unwesentliche Abbildung von $A$ in $B$, so hat die Gleichung $f(p)=g(p)$ wenigstens eine Lösung. Diese Ergebnis lässt sich noch verschärfen:

**Satz 4.** *Seien $A$ ein kompakter metrischer Raum, $B$ eine geschlossene euklidische Mannigfaltigkeit, $f$ eine wesentliche Abbildung von*

*$A$ in $B$ und $g$ eine nullhomotope Abbildung von $A$ in $B$. Dann hat die Gleichung $f(p)=g(p)$ wenigstens eine Lösung.*

Beweis. Nach einem bekannten Einbettungssatze [3] kann man annehmen, es existiere ein euklidischer Raum $E$ mit $A\subset E$. Nach Satz 1 und Satz 2 gibt es dann eine in $E$ offene Menge $U$ mit $A\subset U$, eine stetige Abbildung $f'$ von $U$ in $B$ mit $f'\,|\,A=f\,|\,A$ und eine unwesentliche Abbildung $g'$ von $U$ in $B$ mit $g'\,|\,A=g\,|\,A$.

Da $A$ kompakt und $U$ offen ist, existiert eine positive Zahl $\varepsilon$, so dass die offene $\varepsilon$-Umgebung von $A$ in $U$ liegt. Für alle natürlichen Zahlen $i$ sei $\varepsilon_i=\varepsilon/2i$. Wenn $n$ die Dimension von $E$ und $S_i(p)$ für jeden Punkt $p$ aus $E$ das gleichseitige $n$-Simplex mit $p$ als Mittelpunkt und $\varepsilon_i$ als Durchmesser, so gibt es in $A$ endlich viele Punkte $p_i^1, p_i^2, \cdots$ derart, dass $A\subset\sum_k S_i(p_i^k)$. Es bezeichne $A_i$ das Polyeder $\sum_k \bar{S}_i(p_i^k)$ und $f_i$ die Abbildung $f'\,|\,A_i$.

Wäre $f_i$ eine unwesentliche Abbildung von $A_i$ in $B$, so wäre erst recht $f$ unwesentlich. Also ist $f_i$ wesentlich. Für alle $i$ sei $g_i=g'\,|\,A_i$. Da $g'$ unwesentlich ist, ist erst recht $g_i$ unwesentlich.

Nach Satz 3 gibt es zu jeder natürlichen Zahl $i$ einen Punkt $a_i$ in $A_i$ mit $f_i(a_i)=g_i(a_i)$. Da $A_1$ kompakt und $A_{i+1}\subset A_i$ für alle $i$, existiert ein Punkt $a$ in $A_1$, der Häufungspunkt der $a_i$ ist. Existierte eine Zahl $j$ mit $a\notin A_j$, so existierte weiter eine positive Zahl $\zeta$ derart, dass $d(a, a_i)>\zeta$ für alle $i\geq j$. Somit ist $a\in A_i$ für alle $i$ und daher $a\in A$.

Offenbar ist $f_1(a_i)=g_1(a_i)$ für alle $i$. Hieraus folgt $f_1(a)=g_1(a)$ und also $f(a)=g(a)$, wie behauptet.

## Referenzen

[1] J. Dugundji: An extension of Tietze's theorem, Pacific Journal Math., **1**, 353–367 (1951).

[2] O. Hanner: Solid spaces and absolute retracts, Ark. Mat., **1**, 375–382 (1951).

[3] W. Hurewicz: Ueber Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume, Preuss. Akad. Wiss., Phys. math. Klasse, 754–768 (1933).

[4] W. Hurewicz and H. Wallman: Dimension theory, Princeton Math., ser. 4, 80–83 (1948).

[5] K. Iséki: On extension of continuous mappings on countably paracompact normal spaces, Proc. Japan Acad., **30**, 736–740 (1954).

[6] J. Weier: Ueber einen Erweiterungssatz, Monatsh. für Math., **61**, 51–53 (1957).