20. *Une Considération sur les Représentants Tensoriels de Jets Infinitésimaux*

Par Michiaki KAWAGUCHI

Facultés des Sciences, Université de Hokkaido, Sapporo, Japon

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1961)

Puisque les dérivées d'ordre supérieur d'une application locale ne se transforment pas linéairement pour le changement de coordonnées locales, plusieurs mathématiciens se trouvaient en face de quelques difficultés pour faire la théorie d'espaces d'ordre supérieur. Récemment, en adjoutant quelques termes, A. Kawaguchi a considéré une manière d'essai, par laquelle on peut traiter les dérivées d'ordre supérieur linéairement. Alors, dans cette note, l'auteur essaie dans le calcul des jets infinitésimaux de considérer une sorte de représentants tensoriels dont l'expression est en résultat identique à celle de A. Kawaguchi.

D'abord, d'après l'article [1][1] de Ch. Ehresmann, nous considérons L^r_{np}, l'ensemble des éléments de $J^r(R_p, R_n)$ dont la source et le but sont l'origine commune 0 de R_p et de R_n. Et on sait que le représentant tensoriel d'un élément $X \in L^r_{np}$ est représenté par

$$u^i = \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{\lambda!} a^i_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\lambda} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \cdots u^{\alpha_\lambda} \equiv f^i(u), \tag{1}$$
$$i=1, 2, \cdots, n;\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\lambda = 1, 2, \cdots, p,$$

où u^α, u^i expriment les coordonnées canoniques des espaces numériques R_p, R_n, respectivement. Ensuite, par $R_{\binom{n}{2}}, R_{\binom{n}{3}}, \cdots, R_{\binom{n}{r}}$ nous désignons $r-1$ espaces numériques dont les dimensions sont $\binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \cdots, \binom{n}{r}$, respectivement. Et nous considérons le jet infinitésimal d'ordre r, dont la source est l'origine $0 \in R_p$ et le but l'ensemble des origines $0 \in R_n$, $0 \in R_{\binom{n}{2}}, \cdots, 0 \in R_{\binom{n}{r}}$, bien déterminé par l'application

$$u^{i_1 i_2 \cdots i_\lambda} = \frac{1}{\lambda!} f^{(i_1}(u) f^{i_2}(u) \cdots f^{i_\lambda)}(u), \qquad \lambda = 1, 2, \cdots, r, \tag{2}$$

où $u^{i_1 i_2 \cdots i_\lambda}$ exprime les coordonnées canoniques de $R_{\binom{n}{\lambda}}$, respectivement. Le produit $R_n \times R_{\binom{n}{2}} \times \cdots \times R_{\binom{n}{r}}$ est noté ${}^{\star}R_{n,r}$. Mais, ce jet est essentiellement identique au jet infinitésimal $j^r f$ d'ordre r dont la source et le but sont l'origine commune 0 de R_p et de R_n, car l'application (2) est uniquement bien déterminée par l'application (1). Et donc, l'ensemble de ces jets est aussi essentiellement identique à L^r_{np}. Autrement dit, nous utilisons le représentant tensoriel (2) au lieu de (1). En calculant,

---

1) Les nombres entre crochets renvoient aux références à la fin de cette note.

la forme (2) peut s'écrire

$$u^{i_1}=\sum_{\lambda=1}^{r}\frac{1}{\lambda!}a^{i_1}_{\alpha_1\cdots\alpha_\lambda}u^{\alpha_1}\cdots u^{\alpha_\lambda},$$

$$u^{i_1i_2}=\frac{1}{2!}a^{(i_1}_{\alpha_1}a^{i_2)}_{\alpha_2}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}+\frac{1}{3!}3a^{(i_1}_{\alpha_1}a^{i_2)}_{\alpha_2\alpha_3}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}u^{\alpha_3}$$
$$+\frac{1}{4!}(4a^{(i_1}_{\alpha_1}a^{i_2)}_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}+3a^{(i_1}_{\alpha_1\alpha_2}a^{i_2)}_{\alpha_3\alpha_4})u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}u^{\alpha_3}u^{\alpha_4}+\cdots,$$

$$u^{i_1i_2i_3}=\frac{1}{3!}a^{(i_1}_{\alpha_1}a^{i_2}_{\alpha_2}a^{i_3)}_{\alpha_3}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}u^{\alpha_3}+\frac{1}{4!}6a^{(i_1}_{\alpha_1\alpha_2}a^{i_2}_{\alpha_3}a^{i_3)}_{\alpha_4}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}u^{\alpha_3}u^{\alpha_4}+\cdots,$$

$$u^{i_1i_2i_3i_4}=\frac{1}{4!}a^{(i_1}_{\alpha_1}a^{i_2}_{\alpha_2}a^{i_3}_{\alpha_3}a^{i_4)}_{\alpha_4}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}u^{\alpha_3}u^{\alpha_4}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u^{i_1i_2\cdots i_r}=\frac{1}{r!}a^{(i_1}_{\alpha_1}a^{i_2}_{\alpha_2}\cdots a^{i_r)}_{\alpha_r}u^{\alpha_1}u^{\alpha_2}\cdots u^{\alpha_r}+\cdots,$$

et de plus, en posant $u^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu}=\frac{1}{\mu!}u^{(\alpha_1}u^{\alpha_2}\cdots u^{\alpha_\mu)}$, on peut exprimer ces formes précédentes seulement par une forme simple, comme suit:

$$u^{i_1i_2\cdots i_\lambda}=\sum_{\mu=\lambda}^{r}\sum_{(+s_\lambda)}^{\mu}\frac{\mu!}{s_1!\,s_2!\cdots s_\lambda!\,\nu_1!\cdots\nu_{\mu-\lambda+1}!}a^{(i_1}_{(\alpha(s_1)}a^{i_2}_{\alpha(s_2)}\cdots a^{i_\lambda)}_{\alpha(s_\lambda))}u^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu}, \tag{3}$$
$$\lambda=1,2,\cdots,r,$$

où nous utilisons les notations suivantes: $\sum\limits_{(+s_\lambda)}^{\mu}$ signifie la sommation par rapport à toutes les combinaisons de λ nombres entiers positifs $(s_1, s_2,\cdots, s_\lambda)$ avec la restriction $s_1+s_2+\cdots+s_\lambda=\mu$; par ν_t nous désignons le nombre des mêmes $s_\sigma=t$, $(\sigma=1,\cdots,\lambda)$, prenant t de 1 au plus jusqu'à $\mu-\lambda+1$, car le nombre de $s_\sigma\neq 1$ est au plus $\mu-\lambda$; et nous posons

$$a^{i_1}_{(\alpha(s_1)}a^{i_2}_{\alpha(s_2)}\cdots a^{i_\lambda}_{\alpha(s_\lambda))}$$
$$\equiv a^{i_1}_{(\alpha_1\cdots\alpha_{s_1}}a^{i_2}_{\alpha_{s_1+1}\cdots\alpha_{s_1+s_2}}\cdots a^{i_\lambda}_{\alpha_{s_1+s_2+\cdots+s_{\lambda-1}+1}\cdots\alpha_{s_1+s_2+\cdots+s_\lambda})}.$$

Pour simplifier la notation, nous pouvons désigner la forme (3) par

$$u^{i(\lambda)}=\sum_{\mu=\lambda}^{r}A^{i(\lambda)}_{\alpha(\mu)}u^{\alpha(\mu)}, \tag{4}$$

où nous posons $u^{i(\lambda)}=u^{i_1i_2\cdots i_\lambda}$, $u^{\alpha(\mu)}=u^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu}$ et utilisons la notation

$$A^{i(\lambda)}_{\alpha(\mu)}=\sum_{(+s_\lambda)}^{\mu}\frac{\mu!}{s_1!\,s_2!\cdots s_\lambda!\,\nu_1!\cdots\nu_{\mu-\lambda+1}!}a^{(i_1}_{(\alpha(s_1)}a^{i_2}_{\alpha(s_2)}\cdots a^{i_\lambda)}_{\alpha(s_\lambda))}.$$ [2]

D'autre part, nous considérons L^r_{mn}, l'ensemble des jets d'ordre r dont la source et le but sont l'origine commune de R_n et de R_m et dont le représentant tensoriel s'écrit

$$u^{j(\lambda)}=\sum_{\mu=\lambda}^{r}A^{j(\lambda)}_{i(\mu)}u^{i(\mu)},\quad \lambda=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,m. \tag{5}$$

Pour la composition à gauche par l'élément de L^r_{mn}, le représentant tensoriel (4) de l'élément de L^r_{np} se transforme

2) Cette notation correspond à celle (p. 259, (1.6)) de l'article [2] de A. Kawaguchi.

$$u^{j(\lambda)} = \sum_{\mu=\lambda}^{r} A^{j(\lambda)}_{\alpha(\mu)} u^{\alpha(\mu)}, \tag{6}$$

le représentant tensoriel de l'élément de L^r_{mp}. De même qu'à la théorie de A. Kawaguchi, en substituant $u^{i(\mu)}$ dans la forme (5) par le terme à droite de (4), nous avons

$$u^{j(\lambda)} = \sum_{\nu=\lambda}^{r} A^{j(\lambda)}_{i(\nu)} \sum_{\mu=\nu}^{r} A^{i(\nu)}_{\alpha(\mu)} u^{\alpha(\mu)} = \sum_{\mu=\lambda}^{r} \sum_{\nu=\lambda}^{\mu} A^{j(\lambda)}_{i(\nu)} A^{i(\nu)}_{\alpha(\mu)} u^{\alpha(\mu)},$$

et on obtient la relation suivante entre les coefficients de (4) et de (6)

$$A^{j(\lambda)}_{\alpha(\mu)} = \sum_{\nu=\lambda}^{\mu} A^{j(\lambda)}_{i(\nu)} A^{i(\nu)}_{\alpha(\mu)}.$$ [3]

Enfin, il en résulte la

Proposition: En considérant la forme (2) *pour le représentant tensoriel de jet infinitésimal d'ordre r, on peut le traiter de telle sorte que les coefficients du représentant tensoriel se transforment linéairement. Et que la forme* (2) *puisse s'écrire par la forme* (3) *signifie que cette considération est au résultat identique à celle de A. Kawaguchi.*

Références

[1] Ch. Ehresmann: Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, Colloque intern. géométrie différentielle de Strasbourg, C.N.R.S., 97–110 (1953).

[2] A. Kawaguchi: Die Differentialgeometrie höherer Ordnung IV. Erweiterung der verallgemeinerten Rheonomtransformation von Flächenelementen höherer Ordnung und R_K-Extensoren, Publicationes Mathematicae, Debrecen, **7**, 256–276 (1960).

3) Cette relation est identique à la forme (p. 267, (1.17)) dans l'article [2].