4. *Sur l'intégrale* (A) *et l'intégrale* (*E.R.*)

Par Hatsuo OKANO

Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1965)

Pour intégrer la fonction conjuguée d'une fonction sommable, MM. E. C. Titchmarsh et A. Kolmogoroff ont introduit la notion de l'intégrale (A).[1] Une fonction $f(x)$ est dite intégrable (A) sur un intervalle fini $[a, b]$ si elle satisfait aux conditions suivantes:

(A_1) Mes $(\{x;\ |f(x)| > n\})$[2] $=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(A_2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)]_n dx$ existe, où $[f(x)]_n=\begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)|\leqq n \\ 0 & \text{si } |f(x)|>n. \end{cases}$

La valeur limite (A_2) est désignée par $(A)\int_a^b f(x)dx$.

D'autre part, utilisant la méthode de la complétion de l'espace rangé, Prof. K. Kunugi a défini indépendamment une intégrale singulière qui s'appelle l'intégrale $(E.R.)$.[3] Et, plus tard, MM. I. Amemiya et T. Andô ont démontré que l'intégrabilité $(E.R.)$ d'une fonction $f(x)$ est équivalente aux conditions (A_1), (A_2) et son intégrale est égale à la valeur limite (A_2), c'est-à-dire que l'intégrale $(E.R.)$ est identique à l'intégrale (A).[4]

Or, cette intégrale est une généralisation de celle de Lebesgue. Mais, de la condition (A_1), la fonction $\frac{1}{x}$, par exemple, n'est pas intégrable sur l'intervalle $[-1, 1]$. Donc, nous désirons élargir la portée de l'intégration.

Pour cela, Prof. K. Kunugi a montré que, par la méthode de changement de la variable, nous pouvons définir une telle intégrale.[5] Nous désignons une intégrale de cette sorte par $(E.R.\ \nu)\int_a^b f(x)dx$,

---

1) E. C. Titchmarsh: On conjugate functions. Proc. London Math. Soc., **29**, 49-80 (1929); A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin (1933); Ju. S. Očan: L'intégrale généralisée (en russe), Mat. Sb. **28**, 293-336 (1951).

2) Mes (E) désigne la mesure lebesguienne d'ensemble E.

3) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I. Proc. Japan Acad., **32**, 215-220 (1956).

4) I. Amemiya and T. Andô: Measure-theoretic singular integral (en japonais, avec un sommaire anglais). Bull. Res. Inst. App. El., Hokkaido University, **13**, 33-50 (1961).

5) K. Kunugi: Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Math. Mon. Ser. Res. Inst. App. El., Hokkaido University, **7**, 1-30 (1959).

où ν est une mesure finie jouissant des conditions suivantes:

(1*) Tout ensemble mesurable pour la mesure lebesguienne est mesurable pour ν.

(2*) Mes$(A)=0$ si et seulement si $\nu(A)=0$.

L'intégrale $(E.R.\ \nu)$ peut être définie comme il suit:[6]

$\boldsymbol{K}_1(\nu)$ désigne la famille de toutes les fonctions $f(x)$ telles qu'il existe une suite d'ensembles mesurables $\{A_n\}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(P_1) $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\nu([a,b]-A_n)=0$.

(P_2) Il existe une constante $k>1$ qui satisfait, pour tout n, à $k\nu([a,b]-A_{n+1})\geq\nu([a,b]-A_n)$.

(P_3) $f(x)$ est sommable sur chaque ensemble A_n.

(P_4) Il existe une suite de nombres positifs $\{\varepsilon_n\}$ qui jouit de (i) $\varepsilon_n\downarrow 0$ et (ii) pour tout ensemble mesurable E tel que $E\subseteq A_n$ et $\nu(E)\leq\nu([a,b]-A_n)$, on a $\int_E|f(x)|\,dx\leq\varepsilon_n$. Alors, nous pouvons démontrer la proposition suivante: *Soient $f(x)$ une fonction appartenant à $\boldsymbol{K}_1(\nu)$, $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ deux suites d'ensembles mesurables jouissant des conditions* $(\mathrm{P}_1)-(\mathrm{P}_4)$. *Alors, on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{A_n}f(x)dx=\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{B_n}f(x)dx,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_{A_n}f(x)dx=\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_{B_n}f(x)dx.$$

Donc, on peut désigner ces valeurs limites par $\bar{I}(f,\nu)$, $\underline{I}(f,\nu)$ respectivement. Au cas où $\bar{I}(f,\nu)=\underline{I}(f,\nu)$, nous écrivons

$$\bar{I}(f,\nu)=\underline{I}(f,\nu)=I(f,\nu)=(E.R.\ \nu)\int_a^b f(x)dx.$$

Si l'on a $-\infty<I(f,\nu)<\infty$, la fonction $f(x)$ est dite intégrable $(E.R.\ \nu)$. $\boldsymbol{K}_1(\nu)$, $\bar{I}(f,\nu)$ et $\underline{I}(f,\nu)$ dépendent en général de la mesure ν.

Dans le cas où ν serait la mesure lebesguienne, l'intégrale de $f(x)$ est désignée par $(E.R.)\int_a^b f(x)dx$ et, si elle est finie, $f(x)$ sera dite intégrable $(E.R.)$.

Les propriétés suivantes sont fondamentales.

1) Si une fonction $f(x)$ est sommable, elle est intégrable $(E.R.\ \nu)$ et on a

$$(E.R.\ \nu)\int_a^b f(x)dx=(L)\int_a^b f(x)dx.\text{[7]}$$

6) Voir H. Okano: Les intégrales E. R. généralisées sous une forme de Radon-Stieltjes. Proc. Japan Acad., **36**, 324-326 (1960); Sur une généralisation de l'intégrale (E.R.) et un théorème général de l'intégration par parties. Jour. Math. Soc. Japan, **14**, 430-442 (1962). Dans ces Notes, nous avons donné une définition au moyen de la complétion de $\boldsymbol{L}_1$ regardé comme un espace rangé. Mais, on voit aussitôt qu'elle est équivalente à celle suivante.

7) $(L)\int_a^b f(x)dx$ désigne l'intégrale de Lebesgue.

2) Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions intégrables $(E.R.\,\nu)$, α et β deux nombres réels. Alors, $\alpha f(x)+\beta g(x)$ est aussi intégrable $(E.R.\,\nu)$ et on a

$$(E.R.\,\nu)\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx$$
$$=\alpha(E.R.\,\nu)\int_a^b f(x)dx+\beta(E.R.\,\nu)\int_a^b g(x)dx.$$

Le but de cette Note est de trouver la relation entre l'intégrabilité $(E.R.\,\nu)$ et les conditions (A_1), (A_2) et

$$(\mathrm{A}_1^*)\quad \nu(\{x;\,|f(x)|>n\})=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème 1. *Soit ν une mesure telle qu'il existe une constante C jouissant de l'inégalité $\nu(E)\leq C\,\mathrm{Mes}\,(E)$ pour tout E. Si une fonction $f(x)$ appartient à $\boldsymbol{K}_1(\nu)$, alors elle satisfait à la condition* (A_1^*).

Démonstration. S'il existe une suite d'ensembles $\{A_n\}$ jouissant des conditions (P_1)-(P_4) et telle que $\nu([a,b]-A_1)=0$, la fonction $f(x)$ doit être sommable. Ainsi, elle jouit de la condition (A_1) et donc on a (A_1^*).

Considérons ensuite le cas où $\nu([a,b]-A_1)>0$. Il existe, d'après (P_1) et (P_2), une suite d'entiers $n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$ telle que $Mk^{-i}\leq\nu([a,b]-A_{n_i})\leq Mk^{-i+1}$, où $M=\nu([a,b]-A_1)$, pour tout i. Ainsi, sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que $\{A_n\}$ jouit de (P_1), (P_3), (P_4) et, au lieu de (P_2),

(P_2^*) $\quad Mk^{-n}\leq\nu([a,b]-A_n)\leq Mk^{-n+1}$.

Or, posons $\gamma_n=k^n(\varepsilon_n+k^{-n})^{1/2}$, alors on a

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n k^{-n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n k^n\gamma_n^{-1}=0\ \text{ et }\ \lim_{n\to\infty}\gamma_n=\infty.$$

Désignons ensuite par E_t l'ensemble $\{x;\,|f(x)|\leq t\}$, et supposons par impossible qu'il existe une suite d'entiers $n(1)<n(2)<\cdots<n(i)<\cdots$ jouissant de l'inégalité $\nu(A_{n(i)}-E_{\gamma_{n(i)}})>Mk^{-n(i)}$. Alors, pour tout i, nous pouvons choisir un sous-ensemble F_i de $A_{n(i)}-E_{\gamma_{n(i)}}$ tel que $\nu(F_i)=Mk^{-n(i)}$. D'une part, l'inégalité $\nu(F_i)\leq\nu([a,b]-A_{n(i)})$ entraînent $\int_{F_i}|f(x)|\,dx\leq\varepsilon_{n(i)}$ et, d'autre part, puisque $\mathrm{Mes}\,(F_i)\geq C^{-1}\nu(F_i)=MC^{-1}k^{-n(i)}$, on a $\int_{F_i}|f(x)|\,dx\geq\gamma_{n(i)}\,\mathrm{Mes}\,(F_i)\geq MC^{-1}\gamma_{n(i)}k^{-n(i)}$. D'ou, on a $\varepsilon_{n(i)}k^{n(i)}\gamma_{n(i)}{}^{-1}\geq MC^{-1}$. C'est une contradiction.

Par conséquent, à l'exception, au maximum, d'un nombre fini de n, on a $\nu(A_n-E_{\gamma_n})\leq Mk^{-n}$ et donc, en combinant avec (P_2^*),

$$\nu([a,b]-E_{\gamma_n})\leq M(1+k)k^{-n}.$$

Puisque $\gamma_{n-1}\leq m<\gamma_n$ entraînent $m\nu([a,b]-E_m)\leq\gamma_n\nu([a,b]-E_{\gamma_{n-1}})\leq Mk(1+k)\gamma_n k^{-n}$, on a $\lim_{m\to\infty}m\nu([a,b]-E_m)=0$, c.q.f.d..

Exemples. Considérons toujours l'intégration sur l'intervalle

$[-1, 1]$. La mesure ν est définie par $\nu(E)=\int_E x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}dx$; alors, elle satisfait à l'hypothèse de Théorème 1.

1) *L'intégrabilité* ($E.R.\nu$) *n'impliquent pas nécessairement* (A_1): La fonction $\frac{1}{x}$ est intégrable ($E.R.\nu$), puisque la suite d'ensembles $A_n=\left[-1, -\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ jouit des conditions (P_1)–(P_4) et $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}\frac{dx}{x}=0$. Mais, elle ne satisfait pas à (A_1).

2) *L'intégrabilité* ($E.R.\nu$) *n'assure pas nécessairement l'existence de la limite* (A_2): Considérons la fonction $f(x)$ définie par $f(x)=2n^{3/2}\left(\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right), =-n^{3/2}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}<x<-\frac{1}{n}\right)$, pour $n=2, 3, \cdots$, et en dehors $f(x)=0$. Puisque la même suite $\{A_n\}$ que 1) jouit aussi des conditions (P_1)–(P_4) pour cette fonction et on a $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}f(x)dx=0$, elle est intégrable ($E.R.\nu$). Mais, on a $\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{1}[f(x)]_N dx=-\infty$.

3) *Même si une fonction est intégrable* ($E.R.\nu$) *et la limite* (A_2) *existe, son intégrale n'est pas nécessairement égale à cette valeur limite*: Posons $f(x)=2n\left(\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right), =-n\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}<x<-\frac{1}{n}\right)$, pour $n=2, 3, \cdots$, et en dehors $f(x)=0$. Alors, de la même manière que 1) et 2), on voit qu'elle est intégrable ($E.R.\nu$) et que $(E.R.\nu)\int_{-1}^{1}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}f(x)dx=0$. D'autre part, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}[f(x)]_n dx=\log\frac{1}{2}.$$ [8]

4) *Il existe une fonction jouissant des conditions* (A_1^*), (A_2) *et qui n'appartient pas à* $\boldsymbol{K}_1(\nu)$: Remarquons d'abord que, si ν est la mesure définie par $\nu(E)=\int_E g(x)dx$, en posant $G(x)=\int_a^x g(t)dt+C$ (où C est une constante), pour qu'une fonction $f(x)$ appartienne à $\boldsymbol{K}_1$[9] sur l'intervalle $[G(a), G(b)]$, il faut et il suffit que la fonction $f(G(x))g(x)$ appartienne à $\boldsymbol{K}_1(\nu)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

Or, dans notre cas, $g(x)=x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ et donc $G(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\operatorname{sign} x$.

8) Cette fonction a été donnée par M. E. C. Titchmarsh, comme un exemple qui montre que l'intégrale définie par (A_2) sans (A_1) n'est pas nécessairement additive. Voir la Note citée dans 1).

9) Quand ν est lebesguienne, nous faisons usage simplement de $\boldsymbol{K}_1$ au lieu de $\boldsymbol{K}_1(\nu)$.

Puisque, du Théorème 1, la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ n'appartient pas à $\boldsymbol{K}_1$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$, la fonction $f(G(x))g(x)=\frac{1}{x^2}\operatorname{sign} x$ n'appartient pas à $\boldsymbol{K}_1(\nu)$ sur $[-1, 1]$. Mais, elle satisfait aux (A_1^*) et (A_2).

5) *Il existe une fonction intégrable* (A) *et appartenant à* $\boldsymbol{K}_1(\nu)$ *cependant son intégrale* ($E.R.\ \nu$) *est égale à* $-\infty$: Définissons d'abord deux suites $a(n)$ et $b(n)$ comme il suit :

$$a(n)=\begin{cases} 1 & \text{pour } n=2, 3, \cdots, 8^3, \\ (\log\log m)^{-1} & \text{pour } n((m-1)^3<n\leq m^3,\ m=9, 10, \cdots), \end{cases}$$

$$b(n)=\begin{cases} 1 & \text{pour } n=2, 3, \cdots, 8^2, \\ \frac{3}{2}(\log\log m)^{-1} & \text{pour } n((m-1)^2<n\leq m^2\ \ m=9, 10, \cdots). \end{cases}$$

Et, posons

$$f(x)=\begin{cases} n & \text{pour } x\left(\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}+\frac{a(n)}{n^2}\right) \\ -n^{3/2} & \text{pour } x\left(-\frac{1}{n}-\frac{b(n)}{n^{5/2}}<x<-\frac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{en dehors.} \end{cases} \qquad (n=2, 3, \cdots)$$

Alors, on a

$$\text{Mes}\,(\{x;\,|f(x)|>N\})=O(N^{-1}(a(N)+b(N^{2/3})))=o(N^{-1}).$$

De plus, puisqu'on a

$$\left|\int_{-1}^{1}[f(x)]_{m^3}dx-\int_{-1}^{1}[f(x)]_{(m+1)^3}dx\right|=o\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

$$\left|\int_{-1}^{1}[f(x)]_N dx-\int_{-1}^{1}[f(x)]_{m^3}dx\right|=o\left(\frac{1}{m}\right),$$

où $m^3\leq N\leq(m+1)^3$, $m=1, 2, \cdots$, elle satisfait à (A_2). Donc, elle est intégrable (A).

D'autre part, puisque la suite d'ensembles $A_n=\left[-1, -\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ jouit des conditions (P_1)–(P_4), $f(x)$ appartient à $\boldsymbol{K}_1(\nu)$.

Mais, on a

$$\int_{A_{(m+1)^6}-A_{m^6}}f(x)dx\leq-\frac{1}{m\log\log m}+c_m,$$

où c_m est une suite telle que $\sum_{m=1}^{\infty}c_m$ converge, et de plus, si $m^6\leq n\leq (m+1)^6$,

$$\left|\int_{A_{m^6}}f(x)dx-\int_{A_n}f(x)dx\right|=O\left(\frac{1}{m}\right).$$

D'où, $I(f, \nu)=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)dx=-\infty$.

Exemple 6. Soit ν_1 la mesure définie dans l'intervalle $[0, 1]$ par $\nu_1(E)=\int_E \frac{dx}{x^{1/2}}$. Alors, elle ne jouit pas de l'hypothèse de Théorème 1. La fonction $x^{-2/3}$ est sommable et donc intégrable $(E.R.\ \nu_1)$ sur $[0, 1]$. Mais, on a $\lim_{n\to\infty} n\nu_1(\{x; |f(x)|>n\})=\infty$.

Comme une inverse du Théorème 1, on a le

Théorème 2. *Soit ν une mesure telle qu'il existe une constante C jouissant de l'inégalité* $\mathrm{Mes}(E)\leq C\nu(E)$ *pour tout E. Si une fonction $f(x)$ satisfait à la condition* (A_1^*), *elle appartient à* $\boldsymbol{K}_1(\nu)$ *et on a*

$$(*)\qquad \bar{I}(f, \nu)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_a^b [f(x)]_n dx,\ \underline{I}(f, \nu)=\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)]_n dx.$$

Démonstration. Désignons par E_t l'ensemble $\{x; |f(x)|\leq t\}$ et posons $\gamma_t=\nu([a, b]-E_t)$.

S'il existe un nombre t tel que $\gamma_t=0$, alors $f(x)$ est bornée presque partout dans $[a, b]$ et donc intégrable $(E.R.\ \nu)$.

Ainsi, considérons le cas où $\gamma_t>0$ pour tout t. Dans ce cas, on peut choisir une suite d'ensembles mesurables $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$ jouissant des conditions suivantes:

1) $2\nu([a, b]-A_{n+1})\geq\nu([a, b]-A_n)$

2) Il existe une suite d'entiers $n(1)<n(2)<\cdots<n(m)<\cdots$ tels que $A_{n(m)}=E_m$.

Puisque $\nu([a, b]-A_{n(m)})=\gamma_m$ tend vers 0, on a $\lim_{n\to\infty}\nu([a, b]-A_n)=0$.

Désignons ensuite par $m(n)$ l'entier m jouissant de l'inégalité $n(m)\leq n<n(m+1)$ et posons

$$\varepsilon_n'=2Cm(n)\gamma_{m(n)},\ \varepsilon_n=\sup_{i\geq n}\varepsilon_i'.$$

Alors, d'après (A_1^*), on a $\varepsilon_n\downarrow 0$. Et, de plus, si E un sous-ensemble de A_n tel que $\nu(E)\leq\nu([a, b]-A_n)$, on a

$$\int_E |f(x)|dx\leq(m(n)+1)\,\mathrm{Mes}(E)\leq C(m(n)+1)\nu(E)$$
$$\leq C(m(n)+1)\gamma_{m(n)}\leq\varepsilon_n'\leq\varepsilon_n.$$

De plus, $f(x)$ est bornée sur A_n.

Par conséquent, $f(x)$ appartient à $\boldsymbol{K}_1(\nu)$.

Enfin, $(*)$ résulte de l'inégalité suivante:

$$\left|\int_{A_n} f(x)dx-\int_a^b [f(x)]_{m(n)}dx\right|\leq\int_{E_{m(n)+1}-E_{m(n)}}|f(x)|dx$$
$$\leq(m(n)+1)\gamma_{m(n)}$$
$$=C^{-1}\varepsilon_n, \qquad \text{c. q. f. d..}$$

Des Théorèmes 1 et 2, on peut en déduire le résultat susdit de MM. I. Amemiya et T. Andô.