30. *Sur une Représentation de la Fonction Delta de Dirac.* I

Par Shizu NAKANISHI
Université d'Osaka Préfecture

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1965)

I. L. Bondi a déjà montré dans son travail: A-integral and generalized functions, Usp. Mat. Nauk, 19 (1964), que toute distribution T s'écrit sous une forme d'intégrale, utilisant l'integrale (A), c.-à-d. il existe une fonction $f(x)$ telle qu'on ait $\mathrm{T}(\varphi)=(\mathrm{A})\int f(x)\varphi(x)dx$ pour toute fonction $\varphi(x)$ à dérivée bornée. Mais, on voit que le noyau $f(x)$ introduit par Bondi n'est localement borné en aucun point.

Dans une série de ces Notes, en utilisant l'intégrale (E.R. ν),[1] nous donnerons, pour la fonction de Dirac δ, d'autres représentations que celle de Bondi, par l'integrale. Nous avons vu[2] que l'intégrale (A) coincide avec l'integrale (E.R.), et que l'intégrale (E.R.) coincide avec l'intégrale (E.R. ν), si l'on prend pour ν la mesure de Legesgue. Nous prenons ici pour ν une mesure définie par $\nu(A)=\int_A x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}dx$. D'abord, nous montrerons dans cette note que la fonction de Dirac δ s'écrit sous une forme d'integrale de la manière suivante:
quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ bornée et continue au point $x=0$, on a

$$\delta(\varphi)=(\mathrm{E.R.}\ \nu)\int\Big(K_1(x)\varphi(x)-\sum_{j=2}^{\infty}K_j(\lambda_j(x))\varphi(\lambda_j(x))\lambda_j'(x)\Big)dx,$$

où $K_1(x)$, $\sum_{j=2}^{\infty}K_j(\lambda_j(x))\lambda_j'(x)$ sont les fonctions bornées sauf au point $x=0$ et $\lambda_j(x)$ est l'application bornée à derivée bornée.

L'entier j prend toutes les valeurs ≥ 2; pour chaque valeur de j, considérons les points de division $a_{j,i}(i=0, 1, 2, \cdots, j-1)$ tels que

$$a_{j,0}=\frac{1}{j+1}<a_{j,1}<a_{j,2}<\cdots<a_{j,j-1}=\frac{1}{j}$$

et on ait $a_{j,i}-a_{j,i-1}=\dfrac{1}{j(j^2-1)}$ pour tout $i=1, 2, \cdots, j-1$. Désignons par λ_{ji} les applications linéaires des intervalles $[a_{j,j-i-1}, a_{j,j-i}]$ sur les intervalles $\left[\dfrac{1}{i+1}, \dfrac{1}{i}\right]$, telles que $\lambda_{ji}(a_{j,j-i-1})=\dfrac{1}{i+1}$ et $\lambda_{ji}(a_{j,j-i})=\dfrac{1}{i}$.

1) Pour la définition, voir Hatsuo Okano: Sur une généralisation de l'intégrale (E.R.) et un théorème généralisation de l'intégration par parties. J.M.S. of Japan, 430-442 (1962).

2) Voir I. Amemiya and T. Ando: On the class of functions integrable in a certain generalized dense. Hokkaido University, Department of Mathematics and Research Institute of Applied Electricity, **17**, 127-140 (1964).

De plus, entendons par $\lambda_j(x)$ l'application définie sur l'intervalle $\frac{1}{j+1}<x\leq\frac{1}{j}$ de la manière que $\lambda_j(x)$[3] $=\lambda_{ji}(x)$ pour $a_{j,j-i-1}<x\leq a_{j,j-i}$ $(i=1, 2, \cdots, j-1)$.

Alors, on a le

Théorèm 1. *Posons* $K_1(x)=\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\eta_j(x)$ *et* $K_j(x)=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i(i+1)}{j(j-1)}\eta_i(x)$ *pour tout* $j\geq 2$, *où* $\eta_k(x)$ *est en général la fonction caractéristique d'intervalle* $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. *Alors, la fonction de Dirac* δ *s'écrit sous une forme d'intégrale de la manière qu'on a*

$$\delta(\varphi)=(\text{E.R.}\,\nu)\int\Big(K_1(x)\varphi(x)-\sum_{j=2}^{\infty}K_j(\lambda_j(x))\varphi(\lambda_j(x))\lambda_j'(x)\Big)^{3)}dx,$$

quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ *bornée et continue au point* $x=0$.

Démonstration. D'abord, montrerons que la fonction $K_1(x)\varphi(x)+\sum_{j=2}^{\infty}K_j(\lambda_j(x))\varphi(\lambda_j(x))\lambda_j'(x)$ est intégrable (E.R. ν). Soit N un nombre positif tel que $|\varphi(x)|<N$. Posons $\varepsilon_n=\min(e^{-(n+1)}, 2N(n+1)^{-1})$, $A_n=[-\infty, 0]\cup[(n+1)^{-1}, +\infty]$, $f_1(x)=2\eta_1(x)\varphi(x)$ et

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{n}(j+1)\eta_j(x)\varphi(x)-\sum_{j=2}^{n}K_j(\lambda_j(x))\varphi(\lambda_j(x))\lambda_j'(x)$$

pour tout $n\geq 2$. Alors, on voit aussitôt que $\nu(CA_n)$[4] $=e^{-(n+1)}$, de sorte qu'on ait $(F_1(\nu))$: $(CA_n)\leq\varepsilon_n$. Soit B un ensemble mesurable quelconque dont la mesure $\nu(B)$ est inférieur à $\nu(CA_n)$. Puisque la fonction $x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$ est monotone croissante (resp. décroissante) dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\left(\text{resp.}\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$, si l'on pose $B_1=B\cap\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\right]$ et $B_2=B\cap\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a $\nu(B_1)\geq(n+1)^2e^{-(n+1)}\,\text{mes}\,B_1$[5] et $\nu(B_2)\geq e^{-1}\,\text{mes}\,B_2$. Donc, d'après ce qu'on a $e^{-1}\geq(n+1)^2e^{-(n+1)}$ pour tout $n=1, 2, \cdots$, on a $\text{mes}\,(B_1\cup B_2)\leq(n+1)^{-2}e^{n+1}\nu(B_1\cup B_2)$. D'autre part, on a $\lambda_j'(x)=\lambda_{ji}'(x)=\frac{j(j^2-1)}{i(i+1)}$ pour $a_{j,j-i-1}<x<a_{j,j-i}$, d'où $f_n(x)$ s'écris

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{n}(j+1)\eta_j(x)\varphi(x)-\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(j+1)\eta_i(\lambda_j(x))\varphi(\lambda_j(x)).$$

Donc, on a $|f_n(x)|<2(n+1)N$. Conséquemment, on a

$$(F_2(\nu)):\int_B|f_n(x)|\,dx\leq(n+1)^{-2}e^{n+1}\nu(B_1\cup B_2)\cdot 2(n+1)\cdot N$$
$$\leq 2N(n+1)^{-1}e^{n+1}e^{-n+1}=2N(n+1)^{-1}\leq\varepsilon_n.$$

On a en outre $(P^*(\nu))$: $\nu(CA_n)/\nu(CA_{n+1})=e$.

Ensuite, nons allons montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx=\varphi(0)$, de sorte

3) $\lambda_j(x)$ est dérivable sauf aux points d'un nombre fini.

4) $C(A)$ désigne le complement de l'ensemble A.

5) mes (A) désigne la mesure lebesguienne de l'ensemble A.

qu'on ait (E.R. ν)$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\varphi(0)$. On a

$$\int K_j(\lambda_j(x))\varphi(\lambda_j(x))\lambda'_j(x)dx=\frac{1}{j(j-1)}\sum_{i=1}^{j-1}\int i(i+1)\eta_i(x)\varphi(x)dx.$$

En outre, on a

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j(j-1)}\sum_{i=1}^{j-1}\int i(i+1)\eta_i(x)\varphi(x)dx$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\int i(i+1)\eta_i(x)\varphi(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\int i(i+1)\eta_i(x)\varphi(x)dx.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{j=1}^{n}\int (j+1)\eta_j(x)\varphi(x)dx=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\int j(j+1)\eta_j(x)\varphi(x)dx.$$

Donc, il s'ensuit que

$$\int f_n(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int i(i+1)\eta_i(x)\varphi(x)dx.$$

On a de plus

$$\left|\int i(i+1)\eta_i(x)\varphi(x)dx-\varphi(0)\right|=\left|\int i(i+1)\eta_i(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx\right|$$
$$\leq\max_x\left\{\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right|,\ \frac{1}{i+1}\leq x\leq\frac{1}{i}\right\},$$

d'où on a $\lim_{n\to\infty}\int i(i+1)\eta_i(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$, par suite on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int i(i+1)\eta_i(x)\varphi(x)dx=\varphi(0).$$

Conséquemment, on a $\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx=\varphi(0)$.