178. *Sur une représentation de la fonction delta de Dirac. III*

Par Shizu NAKANISHI

Université d'Osaka Préfecture

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1965)

Montrerons que dans cette Note *nons pouvons définir un noyau $P(x)$ intégrable* (E. R. ν) *indéfiniment dérivable, sauf pour une infinité dénombrable, de façon que les conditions suivantes soient remplies: quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ continue et périodique de période 2π, on a*

$$\varphi(x)=(\text{E. R. } \nu)\int_{-\infty}^{\infty} P(x-y)\varphi(y)dy,$$ [1]

et la dérivée d'ordre m de la fonction $\varphi(x)$ s'exprime

$$\varphi^{(m)}(x)=(\text{E. R. } \nu)\int_{-\infty}^{\infty} P^{(m)}(x-y)\varphi(y)dy\ ,$$

chaque fois que $\varphi(x)$ est exprimable comme une $m^{i\grave{e}me}$ intégrale $(m=1, 2, \cdots)$.

En particulier, on voit que, *dans le cas de δ de Dirac, on peut localement connaître comme la dérivée au sens ordinaire d'un noyau la dérivée au sens de distribution* de la manière que: pour toute fonction $\varphi(x)$ indéfiniment dérivable dont le support est contenu dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on a

$$\delta^{(m)}(\varphi)=(-1)^m\varphi^{(m)}(0)=(\text{E. R. } \nu)\int_{-\infty}^{\infty} P^{(m)}(x)\hat{\varphi}(x)dx$$

en considérant la fonction $\hat{\varphi}(x)$ égale à $\varphi(x)$ pour $-\pi\leq x\leq\pi$ et de période 2π à la place de $\varphi(x)$.

Prenons pour ν une mesure définie par

$$\nu(A)=\int_A e^{-|x|}dx\ .$$

On a d'abord le

Lemme 3. *Soient $\varphi(x)$ une fonction bornée et périodique de période 2π, et $\{k_j(x); j=1, 2, \cdots\}$ une suite des fonctions satisfaisant les propriétés suivantes*:

i) $k_j(x)=0$ *en dehors d'intervalle* $-\pi\leq x<\pi$,

ii) *on a* $\max_x |k_j(x)| \leq \max_x |k_{j+1}(x)| <\infty$,

---

1) Plus précisément, il suffit que $\varphi(x)$ soit une fonction bornée (pas nécessairement continue). On a alors

$$\varphi(x)=(\text{E. R. } \nu)\int_{-\infty}^{\infty} P(x-y)\varphi(y)dy$$

en tout point x tel que la fonction $\varphi(x)$ soit continue.

iii) *on a* $\max_x |k_j(x)| = o(j)$.

Alors, si l'on pose

$$K(x) = k_1(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j}\left\{k_j(x-2(j-1)\pi) - \frac{1}{j-1}\sum_{i=1}^{j-1} k_i(x-2(j-1)\pi)\right\},$$

on a

$$(\text{E. R. } \nu)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}} K(x)\varphi(x)dx = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} k_j(x)\varphi(x)dx .$$

Démonstration. Posons simplement $\rho(j) = \max_x |k_j(x)|$, et soit M un nombre positif tel que $|\varphi(x)| < M$. Désignons par A_n l'intervalle $-\infty < x \leq (2n-1)\pi$, et posons

$$K_n(x) = k_1(x) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\left\{k_j(x-2(j-1)\pi) - \frac{1}{j-1}\sum_{i=1}^{j-1} k_i(x-2(j-1)\pi)\right\}$$

et $\varepsilon_n = 16M\rho(n)/n$. Puis, condidérons la suite des voisinages $v = \{V(\varepsilon_n, A_n; K_n(x)\varphi(x))\}$. On a d'abord $\nu(CA_n) = 1/e^{(2n-1)\pi}$, de sorte que la suite jouisse des propriétés $(F_1(\nu))$ et $(P^*(\nu))$.[2] On a de plus

$$\int_B |K_n(x)\varphi(x)|\,dx \leq \varepsilon_n$$

pour tout ensemble B dont la mesure $\nu(B)$ est inrérieure à $\nu(CA_n)$. En effet, puisqu'alors la fonction $K_n(x)\varphi(x)$ a son support dans l'intervalle $[-\pi, (2n-1)\pi]$, il suffit de vérifier le cas où l'ensemble B est contenu dans l'intervalle $[-\pi, (2n-1)\pi]$.

Posons simplement

$$B_1 = B \cap \left[-\pi, \left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\pi\right]$$

$$B_2 = B \cap \left[\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\pi, (2n-1)\pi\right].$$[3]

Alors, on a mes $(B_1) \leq e^{(2[n/2]-1)\pi}\nu(CA_n) = 1/e^{n\pi}$ et

mes $(B_2) \leq e^{(2n-1)\pi}\nu(CA_n) = 1$,

d'où il s'ensuit qu'on a

$$\int_{B_1} |K_n(x)\varphi(x)|\,dx \leq M\int_{B_1}\left(|k_1(x)| + \sum_{j=2}^{[n/2]} (|k_j(x-2(j-1)\pi)|\right.$$

2) Pour la définition, voir Hatsuo Okano: Sur une généralisation de l'intégrale (E. R.) et un théorème général de l'intégration par parties. J. M. S. of Japan, 430-442 (1962).

3) $[a]$ désigne le plus grand nombre des entiers α tels que $\alpha \leq a$.

$$+\frac{1}{j-1}\sum_{i=1}^{j-1}|k_i(x-2(j-1)\pi)|\Big)\Big)dx$$

$$\leq 2M\rho\Big(\Big[\frac{n}{2}\Big]\Big)\text{ mes } B_1$$

$$\leq 2M\rho(n)/e^{n\pi}<\varepsilon_n/2,$$

de même, on a

$$\int_{B_2}|K_n(x)\varphi(x)|\,dx\leq 8M\text{ mes } B_2\rho(n)/n$$

$$\leq 8M\rho(n)/n<\varepsilon_n/2.$$

Donc, v est une suite de Cauchy convergeant vers $K(x)\varphi(x)$. De plus, on peut voir facilement qu'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x)\varphi(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}k_j(x)\varphi(x)dx,$$

d'où, par définition de l'intégrale (E. R. ν), on a le résulta annoncé.

Ensuite, nous désignons par $P(r, x)$ les noyaus de Poisson et par $\varphi^{(m)}(r, x)$, $0\leq r<1$, les moyennes d'Abel de la dérivée d'ordre m d'une fonction $\varphi(x)$. Alors, nous avons déjà vu qu'on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P^{(m)}(r, x)\varphi(x)dx=(-1)^m(\varphi^{(m)}(r, x))_{x=0}$$

et

$$\lim_{r\to 1}(\varphi^{(m)}(r, x))_{x=0}=\varphi^{(m)}(0)$$

pour toute fonction $\varphi(x)$ continue et périodique de période 2π, qui est exprimable comme une $m^{\text{ième}}$ intégrale ($m=0, 1, 2, \cdots$). De plus, nous avons vu que si l'on pose

$$r(n)=1-\frac{1}{\log(n+2)},$$

on a $\max_x|P^{(m)}(r(n), x)|=o(n)$ pour tout $m=0, 1, 2, \cdots$. Désignons simplement par $j(x)$ l'entier $\Big[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\Big]$.

Nons avons maintenant le

Lemme 4. *Désignons par $P(x)$ une fonction définie de façon que*

$$P(x)=\frac{1}{\pi(j(x)+1)}\Big\{P(r(j(x)+1), x)-\frac{1}{j(x)}\sum_{i=1}^{j(x)}P(r(i), x)\Big\}$$

sur l'intervalle $-\pi\leq x<\infty$ et 0 *ailleurs. Alors, on a*

$$(\text{E, R, }\nu)\int_{-\infty}^{\infty}P^{(m)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^m\varphi^{(m)}(0),$$

pour toute fonction $\varphi(x)$ continue et périodique de période 2π, qui est exprimable comme une $m^{\text{ième}}$ intégrale[4] ($m=0, 1, 2, \cdots$).

Démonstration. Pour tout m, posons

4) Dans le cas où $m=0$, il suffit que $\varphi(x)$ soit une fonction bornée et continue au point $x=0$ seulement.

$$k_j(x)=\frac{1}{\pi}P^{(m)}(r(j),\,x)$$

sur l'intervalle $-\pi\leq x<\pi$ et 0 ailleurs. Puisqu'alors la suite des fonctions $\{k_j(x);\,j=1,2,\cdots\}$ satisfait aux conditions i), ii), et iii) de Lemme 3), et que la dérivée $P^{(m)}(x)$ d'ordre m de la fonction $P(x)$ est égale à la fonction $K(x)$ définie, dans Lemme 3, pour la suite, on a aussitôt par Lemme 3

$$(\text{E. R. }\nu)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}}P^{(m)}(x)\varphi(x)dx=\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}k_j(x)\varphi(x)dx.$$

D'autre part, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}k_j(x)\varphi(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P^{(m)}(r(j),\,x)\varphi(x)dx$$
$$=(-1)^m(\varphi^{(m)}(r(j),\,x))_{x=0},$$

de sorte qu'on a

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}k_j(x)\varphi(x)dx=(-1)^m\varphi^{(m)}(0).$$

Donc, $P^{(m)}(x)\varphi(x)$ est intégrable (E. R. ν) et on a

$$(\text{E. R. }\nu)\int_{-\infty}^{\infty}P^{(m)}(x)\varphi(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}k_j(x)\varphi(x)dx$$
$$=(-1)^m\varphi^{(m)}(0).$$

Théorème 3. *Soit $P(x)$ une fonction définie dans* Lemme 4. *Alors, on a*

$$(\text{E. R. }\nu)\int_{-\infty}^{\infty}P^{(m)}(x-y)\varphi(y)dy=(\text{E. R. }\nu)\int_{-\infty}^{\infty}P^{(m)}(y)\varphi(x-y)dy=\varphi^{(m)}(x)$$

pour toute fonction $\varphi(x)$ continue et de période 2π, qui est exprimable comme une $m^{\text{ième}}$ intégrale $(m=0,1,2,\cdots)$.

En effet, dans Lemme 4, si l'on pose $\psi(y)=\varphi(x-y)$, on a

$$(\text{E. R. }\nu)\int_{-\infty}^{\infty}P^{(m)}(y)\varphi(x-y)dy=\varphi^{(m)}(x).$$

De plus, on a

$$(\text{E. R. }\nu)\int_{-\infty}^{\infty}P^{(m)}(y)\varphi(x-y)dy$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_n^{(m)}(y)\varphi(x-y)dy$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_n^{(m)}(x-y)\varphi(y)dy\ ,$$

où $P_n(x)$ est la fonction définie de façon que $P_n(x)=P(x)$ sur l'intervalle $-\pi\leq x<(2n-1)\pi$ et 0 ailleurs. D'autre part, on voit que $P^{(m)}(x-y)\varphi(y)$ est intégrable (E. R. ν) et on a

$$(\text{E. R. }\nu)\int_{-\infty}^{\infty}P^{(m)}(x-y)\varphi(y)dy=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_n^{(m)}(x-y)\varphi(y)dy.\text{[5)]}$$

Donc, on obtient le résulta voulu.

5) Pour le voir, il suffit de prendre la suite des voisinages

$$v=\{V(A_n,\,\varepsilon_n,\,P_n^{(m)}(x-y)\varphi(y))\}$$

tels que A_n soit l'intervalle $[-(2n-1)\pi+x,\,\infty)$ et $\varepsilon_n=16M\max_x|P_n^{(m)}(x)|/n$.