136. *Sur le produit des espaces rangés. II*[1)]

Par Yukio YOSHIDA
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., June 13, 1966)

Dans cette note, soit ω un nombre ordinal limite inaccessible, soit θ ($\theta \neq 0$) un nombre ordinal inférieur ou égale à ω, soit Ξ la totalité des nombres ordinals inférieurs à θ, et soit $\{R_\xi \mid \xi \in \Xi\}$ une famille d'espaces rangés qui satisfont aux axiom (A), (B) de M. Hausdorff et (b) de Prof. K. Kunugi[2)] et dont les indicateurs sont tous égales à ω.

§ 2. Espace $\langle R = \prod_{0 \leq \xi < \theta} R_\xi, \rho_2 \rangle$. Sur l'ensemble produit $R = \prod_{0 \leq \xi < \theta} R_\xi$, prenons pour la base des voisinages d'un point x quelconque de R la totalité des ensembles nolmals[1)] E dont pour chaqu'un il existe un nombre ordinal η inférieur à ω tel que

$$p_\xi(E) = \begin{cases} \text{un voisinage du point } p_\xi(x) & \text{lorsque } 0 \leq \xi < \eta \\ R_\xi & \text{lorsque } \eta \leq \xi \end{cases}$$

(où p_ξ est la projection de R sur R_ξ). Alors l'espace R devient un espace topologique satisfaisant aux axioms (A) et (B).

Sur l'espace R, prenons pour voisinages de range α ($0 \leq \alpha < \omega$) d'un point x quelconque de R tous voisinages normals[1)] de x dont chaqu'un est transformé par la projection $p_\xi: R \to R_\xi$ sur un voisinage du point $p_\xi(x)$ et de rang α dans R_ξ lorsque $0 \leq \xi < \alpha$, et sur R_ξ lorsque $\alpha \leq \xi$. Alors, si tous espaces rangés R_ξ satisfont à l'axiom (c),[1)] R devient un espace rangé dont l'indicateur est ω et qui satisfait aux axioms (b) et (c).

Désignons-le par $\langle R = \prod_{0 \leq \xi < \theta} R_\xi, \rho_2 \rangle$ ou brièvement par $\langle R, \rho_2 \rangle$.

Sur l'espace rangé $\langle R = \prod_{0 \leq \xi < \theta} R_\xi, \rho_2 \rangle$ la projection $p_\xi: R \to R_\xi$ transforme le voisinage d'un point x quelconque de R et de rang α supèrieur à ξ sur un voisinage du point $p_\xi(x)$ et de rang α. Donc, lorsqu'une suite $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages dans R est fondamentale par rapport à x,[3)] pour tout ξ, la suite $\{p_\xi(V_\alpha(x)) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages dans R_ξ est fondamentale par rapport à point $p_\xi(x)$.

Soit S un espace rangé quelconque dont l'indicateur est ω, et

1) Y. Yoshida: Sur le produit des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 477-481 (1966).

2) K. Kunugi: Sur la méthode des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 318-322 (1966).

3) ——: Sur la méthode des espaces rangés. II. Proc. Japan Acad., **42**, 549-554 (1966).

soint $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ une suite fondamentale des voisinages par rapport à un point x quelconque de S. Nous disons que la suite est *débordée* lorsque, pour tout nombre ordinal β $(0 \leq \beta < \omega)$, elle contient au moins un terme de rang β. De plus, lorsqu'elle contient, pour tout β, précisément un term de rang β, nous disons qu'elle est *pleine*.

Si l'espace rangé S satisfait aux axioms (b)[2] et (c),[1] sur la suite fondamentale des voisinages apparaîssante dans les définitions des convergences,[2),4)] on peut supposer que la suite est débordée. De plus, sur la suite $\{U_\alpha(y)\}$ dans 3°) de la définition 1 de la note 4), on peut supposer qu'elle est pleine.

Proposition 2. *Supposons que tous espaces R_ξ $(\xi \in \Xi)$ satisfont à l'axiom (T_1) de séparation de M Fréchet.*[5] *Alors, sur l'espace rangé $\langle R = \prod R_\xi, \rho_2 \rangle$, pour que*

$$x = \underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\, x_\alpha{}^{4)} \qquad \textit{dans } \langle R, \rho_2 \rangle$$

il faut et il suffit que, pour tout $\xi \in \Xi$,

$$p_\xi(x) = \underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\, p_\xi(x_\alpha) \qquad \textit{dans } R_\xi.$$

Démonstration. Soit $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ une suite des points de R et soit x un point de R. Et pour tout $\xi \in \Xi$ soient que, $x^{(\xi)} = p_\xi(x)$ et que $x_\alpha^{(\xi)} = p_\xi(x_\alpha)$.

D'abord supposons que

$$x = \underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\, x_\alpha \qquad \text{dans } \langle R, \rho_2 \rangle$$

et prenons un indice ξ quelconque de Ξ et le fixerons.

Soit $y^{(\xi)}$ un point de R_ξ distinct de $x^{(\xi)}$ et soit y le point R tel que

$$p_\eta(y) = \begin{cases} y^{(\xi)} & \text{lorsque } \eta = \xi, \\ x^{(\eta)} & \text{lorsque } \eta \neq \xi. \end{cases}$$

Comme $x \neq y$, il existe une suite fondamentale débordée $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages par rapport à x dans R telle que la suite $\{p_\xi(V_\alpha(x))\}$ des voisinages du point $x^{(\xi)}$ dans R_ξ définit la relation

$$x^{(\xi)} \in \left\{ \lim_\alpha x_\alpha^{(\xi)} \right\}$$

et telle que l'on a

$$y^{(\xi)} \notin \bigcap_\alpha p_\xi(V_\alpha(x)).$$

Ensuite, dans la suite $\{V_\alpha(x)\}$, pour tout nombre ordinal γ $(0 \leq \gamma < \omega)$, soit $V_{\alpha_\gamma}(x)$ le premier terme de ceux de rang γ.

4) Y. Yoshida: Sur les convergences dans l'espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 473-476 (1966)

5) Avec cette condition l'espace rangé $\langle R = \Pi R_\xi, \rho_2 \rangle$ satisfait aussi à l'axiom (T_1).

Et, soit $\{u_\gamma(y^{(\xi)}) \mid 0 \leq \gamma < \omega\}$ une suite fondamentale pleine des voisinages par rapport ou point $y^{(\xi)}$ dans R_ξ telle que l'on a

$$x^{(\xi)} \notin \bigcap_\gamma u_\gamma(y^{(\xi)}).$$

Lorsque $\gamma \leq \xi$ soit que

$$U_\gamma(y) = V_{\alpha_\gamma}(x)$$

et lorsque $\xi < \gamma < \omega$ soit $U_\gamma(y)$ une partie normale de R telle que

$$p_\eta(U_\gamma(y)) = \begin{cases} p_\eta(V_{\alpha_\gamma}(x)) & \text{lorsque } \eta \neq \xi \\ u_\gamma(y^{(\xi)}) & \text{lorsque } \eta = \xi. \end{cases}$$

Alors la suite $\{U_\gamma(y) \mid 0 \leq \gamma < \omega\}$ est fondamentale pleine des voisinages par rapport au point y dans R telle que l'on a

$$x \notin \bigcap_\gamma U_\gamma(y).$$

Donc, il existe un nombre δ ($\xi < \delta < \omega$) tel que la suite $\{x_\alpha\}$ est résiduelle dans la complimentaire de $U_\delta(y)$. Or, $\alpha_\delta \leq \alpha < \omega$ entraîne

$$x_\alpha \in V_{\alpha_\delta}(x)$$

donc, la suite $\{x_\alpha^{(\xi)} \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de R_ξ est résiduelle dans la complimontaire de

$$p_\xi(U_\delta(y)) = u_\delta(y^{(\xi)}).$$

Donc, on a

$$x^{(\xi)} = \underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\, x_\alpha^{(\xi)} \qquad \text{dans } R_\xi$$

c'est-à-dire que

$$p_\xi(x) = \underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\, p_\xi(x_\alpha) \qquad \text{dans } R_\xi.$$

Inversement supposons que, pour tout $\xi \in \Xi$,

$$p_\xi(x) = \underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\, p_\xi(x_\alpha) \qquad \text{dans } R_\xi.$$

Soit y un point quelconque de R distinct de x, et soient que, pour tout $\xi \in \Xi$,

$$y^{(\xi)} = p_\xi(y).$$

Par la supposition, dans chaque R_ξ ($0 \leq \xi < \theta$), il existe une suite fondamentale débordée $\{v_\alpha^\xi(x^{(\xi)}) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages par rapport au point $x^{(\xi)}$ telle que l'on a

$$x_\alpha^{(\xi)} \in v_\alpha^\xi(x^{(\xi)}) \qquad (0 \leq \alpha < \omega).$$

Et pour au moins un indice ξ_0 on a

$$y^{(\xi_0)} \notin \bigcap_\alpha v_\alpha^{\xi_0}(x^{(\xi_0)}).$$

Comme la suite $\{v_\alpha^\xi(x^{(\xi)}) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ est débordée, on en peut tirer une suite partielle pleine $\{v_\alpha^{\xi *}(x^{(\xi)}) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$.

Maintenant, soit α un nombre ordinal quelconque ($0 \leq \alpha < \omega$). Pour tout indice ξ inférieur à α, il existe un nombre ordinal β_ξ tel que

$$\beta_\xi < \beta < \omega \qquad \text{entraîne} \qquad x_\beta^{(\xi)} \in v_\alpha^{\xi *}(x^{(\xi)}).$$

Donc, soit que $\gamma_\alpha = \sup\{\beta_\xi \mid 0 \leq \xi < \alpha\}$ alors $\gamma_\alpha < \omega$ et l'on a, pour tout ξ ($0 \leq \xi < \alpha$),

$$\gamma_\alpha<\beta \quad \text{entraîne} \quad x_\beta^{(\xi)} \in v_\alpha^{\xi *}(x^{(\xi)}).$$

Donc, soit $V_\alpha^*(x)$ le voisinage normal de x dans R tel que

$$p_\xi(V_\alpha^*(x))=\begin{cases} v_\alpha^{\xi *}(x^{(\xi)}) & \text{lorsque } \xi<\alpha \\ R_\xi & \text{lorsque } \xi\geqq\alpha \end{cases}$$

alors $\gamma_\alpha<\beta$ entraîne $x_\beta \in V_\alpha^*(x)$.

Par conséquent, on peut sans peine construire par la suite $\{V_\alpha^*(x) \mid 0\leq\alpha<\omega\}$ une suite fondamentale débordée $\{V_\alpha(x) \mid 0\leq\alpha<\omega\}$ des voisinages par rapport au point x définissant la relation

$$x \in \left\{\lim_\alpha x_\alpha\right\}.$$

De plus, par la relation

$$y^{(\xi_0)} \notin \bigcap_\alpha v_\alpha(x^{(\xi_0)})$$

on peut avoir

$$y \notin \bigcap_\alpha V_\alpha(x).$$

Ensuite, soit

$$\{U_\alpha(y) \mid 0\leq\alpha<\omega\}$$

une suite fondamentale quelconque des voisinages par rapport à y dans R telle que l'on a

$$x \notin \bigcap_\alpha U_\alpha(y).$$

Donc, il existe au moins un indice ξ tel que l'on a

$$x^{(\xi)} \notin \bigcap_\alpha p_\xi(U_\alpha(y)).$$

Comme $\{p_\xi(U_\alpha(y)) \mid 0\leq\alpha<\omega\}$ est une suite fondamentale par rapport au point $y^{(\xi)}$ dans R_ξ et comme $y^{(\xi)}$ est distinct de $x^{(\xi)}$, il existe un nombre ordinal α_0 $(0\leq\alpha_0<\omega)$ tel que la suite $\{x_\alpha^{(\xi)}\}$ est résiduelle dans la complimentaire de $p_\xi(U_{\alpha_0}(y))$. Donc, la suite $\{x_\alpha\}$ est résiduelle dans la complimentaire de $U_{\alpha_0}(y)$.

Par conséquent

$$x=\lim_\alpha\text{-}q\text{-prop}\, x_\alpha \quad \text{dans } \langle R, \rho_2\rangle \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Avec la supposition de la proposition 1, sur l'espace rangé $\langle R=\prod_{0\leq\xi<\theta} R_\xi, \rho_2\rangle$, on a quatre corollaires suivantes:

Corollaire 1. *Toute la projection p_ξ: $R\to R_\xi$ est continue (QR)*[1]

Corollaire 2. *Pour que*

$$x \in \left\{\lim_\alpha x_\alpha\right\} \quad \textit{dans } [R, \rho_2]$$

il faut et il suffit que, pour tout indice ξ $(0\leq\xi<\theta)$,

$$p_\xi(x) \in \left\{\lim_\alpha p_\xi(x_\alpha)\right\} \quad \textit{dans } R_\xi.$$

Corollaire 3. *Pour que l'espace rangé $\langle R=\prod R_\xi, \rho_2\rangle$ soit quasi-séparément rangé,*[4] *il faut et il suffit que tous espaces facteurs R_ξ sont quasi-séparément rangés.*

Corollaire 4. *Si l'on a*

$$x = \underset{\alpha}{\text{lim-prop}}\, x_\alpha{}^{2)} \qquad \textit{dans } \langle R, \rho_2\rangle$$

alors, pour tout ξ $(0 \leq \xi < \theta)$ *on a*

$$p_\xi(x) = \underset{\alpha}{\text{lim-prop}}\, p_\xi(x_\alpha) \qquad \textit{dans } R_\xi.$$

Nous monterons, dans l'example suivant, que la inverse du corollaire 4 n'est pas vraie.

Example 2. Dans l'example 1,[1] à chaque espace R_ξ, ajoutons pour le voisinage de rang n $(0 < n < \omega_0)$ du point $\bar{y}^{(\xi)} = 2^{-(\xi+1)}$ la partie

$$u_n(\bar{y}^{(\xi)}) = \{z^{(\xi)} \mid z^{(\xi)} \in R_\xi, \quad \text{et}$$
$$\text{ou } |z^{(\xi)} - \bar{y}^{(\xi)}| < 2^{-n}, \text{ ou } |z^{(\xi)}| < 2^{-n}, \text{ ou } z^{(\xi)} = n\}.$$

Désignons par R'_ξ le nouvel espace rangé obtenu de R_ξ. Par cet ajouté, dans chaque espace R_ξ l'état concernant les convergences ne changent pas.

Donc, pour les points $x, x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ dans l'example 1, on a

$$x^{(\xi)} = \underset{n}{\text{lim-prop}}\, x_n^{(\xi)} \qquad \text{dans } R'_\xi$$

et l'on a

$$x \in \left\{\lim_n x_n\right\} \qquad \text{dans } \langle R' = \prod R'_\xi, \rho_2\rangle.$$

Pour le point $\bar{y} = (\bar{y}^{(0)}, \bar{y}^{(1)}, \cdots, \bar{y}^{(\xi)}, \cdots)$ de R' soit

$$V(\bar{y}) = \bigcup_{0 \leq \xi < \omega_0} p_\xi^{-1}(v_{\xi+1}^{\xi}(\bar{y}^{(\xi)}))$$

alors, $V(\bar{y})$ est un voisinage du point $\bar{y}$ ne contenant pas le point $x = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$. Et, pour tout nombre ordinal m $(0 < m < \omega_0)$, soit $V_m(\bar{y})$ la partie normale de R' telle que

$$p_\xi(V_m(\bar{y})) = \begin{cases} u_m(\bar{y}^{(\xi)}) & \text{lorsque } 0 \leq \xi < m-1 \\ v_m^{m-1}(\bar{y}^{(m-1)}) & \text{lorsque } \xi = m-1 \\ R_\xi & \text{lorsque } \xi \geq m \end{cases}$$

alors $V_m(\bar{y})$ est un voisinage de rang m du point $\bar{y}$ contenu dans $p_{m-1}^{-1}(v_m^{m-1}(\bar{y}^{(m-1)}))$, donc, dans $V(\bar{y})$.

Mais, pour tout nombre ordinal m $(0 < m < \omega_0)$, la suite $\{x_n\}$ des point de R' est résiduelle dans $V_m(\bar{y})$. Donc, on a

$$x \neq \underset{n}{\text{lim-prop}}\, x_n \qquad \text{dans } \langle R', \rho_2\rangle.$$