230. *Sur les espaces duels des espaces de Stepanoff et de Weyl.* I

Par Yukio YOSHIDA
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1966)

Concernant les études sur les fonctions presque périodiques, MM. E. Hewitt [3] et E. Følner [4] ont réussi à réaliser l'espace duel de l'espace $\mathfrak{A}$ et celui de l'espace $\mathfrak{B}$ respectivement: où $\mathfrak{A}$ est la complétion de l'espace P, tous les polynômes trigonométriques, par la norme

$$\|x\|_U=\sup_t|x(t)|$$

et où $\mathfrak{B}$ est celle par la norme de M. Besicovitch

$$\|x\|_B=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(p\geqq 1).$$

Sur les espaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{W}$, les complétions de P par la norme de M. Stepanoff

$$\|x\|_S=\sup_t\left(\int_t^{t+1}|x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

et de M. Weyl

$$\|x\|_W=\lim_{l\to+\infty}\sup_t\left(\frac{1}{l}\int_t^{t+l}|x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

respectivement, il nous apparaît que l'on n'a pas réussi à réaliser l'espace duel de $\mathfrak{S}$ ou de $\mathfrak{W}$.

D'autre part, on peut avancer les problémes de réaliser les espaces S, W et B, complétions de toutes les fonctions éscalières mesurables par les normes $\|x\|_S$, $\|x\|_W$, *et* $\|x\|_B$ respectivement.

Dans cette note et celle prochaîne, nous allons étudier les représentations intégrales des fonctionnelles linéaires sur les espaces S et W qui sont les complétions de la totalité E des fonctions éscalières mesurables par les normes

$$\|x\|_l=\sup_n\left(\frac{1}{l}\int_{nl}^{(n+1)l}|x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|x\|_W=\lim_{l\to+\infty}\|x\|_l{}^{1)}$$

respectivement. Nous allons appeler les espaces S et W espace de

1) On peut voir que pour toute fonction mesurable $x(t)$

$$\lim_{l\to+\infty}\sup_t\left(\frac{1}{l}\int_t^{t+l}|x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

est égale à $\lim_{l\to+\infty}\|x\|_l$.

M. Stepanoff et celui de M. Weyl respectivement.

§ 1 **Préliminaire.** Soient p et q nombres positifs fixés tels que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

et l un nombre positif.

Désignons par R la totalité des nombres réels, et par Δ_l l'ensemble de tous les intervalles

$$[nl, (n+1)l) \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

contenus à R.

Une *partition* de R est une famille finie de parties mutuellement disjointes de R, qui est un recouvrement de R. Disons qu'une partition

$$\{A_{ij} \mid i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n\}$$

de R est *l-régulière* si elle satisfait aux trois conditions suivantes

(1) toute A_{ij} est mesurable et de mesure positive.

(2) pour tout intervalle I de Δ_l, il existe un nombre j $(1 \leqq j \leqq n)$ tel que

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_{ij} = B_j.$$

(3) si deux intervalles I et I' de Δ_l sont contenus à même ensemble B_j, alors pour tout nombre $i (1 \leqq i \leqq m)$ on a

$$\text{mes}\,(A_{ij} \cap I) = \text{mes}\,(A_{ij} \cap I').$$

(mes (A) signifiera la mesure lebesgienne de A)

Posons

$$| A_{ij} |_l = \text{mes}\,(A_{ij} \cap I)$$

où I appartient à Δ_l et est contenu à B_j.

Désignons par $\chi(A) = \chi(A; t)$ la fonction caractéristique d'une partie A de R, et appelons fonction élémentaire une fonction $x(t)$ définie par

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi(A_i; t)$$

où α_i $(1 \leqq i \leqq m)$ sont nombres complexes et la famille $\{A_i \mid 1 \leqq i \leqq m\}$ est une partition de R dont chaque A_i est mesurable. En particulier, si la partition $\{A_i\}$ est l-régulière alors nous disons que la fonction $x(t)$ est l-régulière.

Soit E la totalité des fonctions élémentaires et pour toute fonction $x = x(t)$ appartenant à E, posons

$$\| x \|_l = \sup \left\{ \left(\frac{1}{l} \int_I | x(t) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \middle| \, I \in \Delta_l \right\}.$$

Lorsque la fonction élémentaire

$$x(t) = \sum_{i,j=1}^{m\ n} \alpha_{ij} \chi(A_{ij}; t)$$

est l-régulière, nous avons

$$\|x\|_l=\sup_j\left(\sum_{i=1}^m|\alpha_{ij}|^p\,|A_{ij}|_l\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si l'on identifie deux fonctions élémentaires $x(t)$ et $y(t)$ de E telle que

$$\|x-y\|_l=0$$

alors l'ensemble E devient un espace normé. Désignons-le par E_l.

Soit S_l la complétion de E_l. A chaque élément f de l'espace duel S_l^* de S_l, $\|f\|_l$ signifiera sa norme.

Enfin, pour une fonction additive d'ensenble φ quelconque, à valeurs complexes, définie pour toutes parties mesurables de R, posons

$$\|\varphi\|_l=\sup\left\{\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m\frac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|_l^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}}\,\middle|\,\{A_{ij}\}\right\}$$

où $\{A_{ij}\}$ parcourt toutes les partitions l-régulière de R.

§ 2. Espace S_l^*. Dans ce paragraph, nous fixons le nombre l, et l'abrégerons s'il n'y a aucune ambiguité, et montrons que l'espace S_l^* peut être considéré comme l'espace composé de fonctions d'ensembles satisfaisant aux conditions de la proposition 2 suivante.

Lemma 1. *Soit $x(t)$ une fonction élémentaire quelconque, alors pour tout nombre positif δ il existe une fonction l-régulière $x_0(t)$ telle que*

$$\|x-x_0\|<\delta.$$

Démonstration. Soit

$$x(t)=\sum_{i=1}^m\alpha_i\chi(A_i)$$

et soient

$$A_k^*=\bigcup_{i=1}^k A_i\qquad(k=1,2,\cdots,m).$$

Alors, pour tout $I\in\Delta$, on a

$$0\leqq\text{mes}\,(I\cap A_1^*)\leqq\text{mes}\,(I\cap A_2^*)\leqq\cdots\leqq\text{mes}\,(I\cap A_m^*)=l.$$

Prenons un nombre entier N tel que

$$N>m(2\alpha)^p\delta^{-p}$$

où $\alpha=\max_i|\alpha_i|$.

Nous disons que le type $\tau(I)$ de $I\in\Delta$ est

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$$

lorsque

$$\frac{\lambda_k}{2N}\leqq\frac{\text{mes}\,(I\cap A_k^*)}{l}<\frac{\lambda_k+1}{2N}$$

où λ_k sont nombres entiers non-négatifs $(k=1,2,\cdots,m)$.

Puisque le nombre des types des intervals $I\in\Delta$ est fini, nous les désignons par

$$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n.$$

Posons

$$B_j=\cup\{I\mid\tau(I)=\tau_j\}\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

alors on a

$$B_j \cap B_{j'} = 0 \qquad (\text{lorsque } j \neq j')$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j = R.$$

De cette famille $\{B_j\}$ on peut construire la partition l-régulière de R

$$\{A_{ij} \mid i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n\}$$

telle que l'on ait

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_{ij} = B_j \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

et que pour tout $I \in \Delta$ contenu à B_j on ait

$$\text{mes}\,(I \cap (A_i \Delta A_{ij})) < \frac{1}{N}.$$

($A \Delta B$ signifiera $(A-B) \cup (B-A)$)

Et meintenant, nous posons

$$x_0 = \sum_{i,j=1}^{m,n} \alpha_i \chi(A_{ij})$$

alors

$$\| x - x_0 \| < \delta.$$

Car, pour tout $I \in \Delta$, il existe un nombre j $(1 \leqq j \leqq n)$ tel que $I \subseteqq B_j$. Alors on a

$$\begin{aligned}\int_I | x - x_0 |^p \, dt &= \int_I \left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi(A_i) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi(A_{ij}) \right|^p dt \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{i'=1}^{m} | \alpha_i - \alpha_{i'} |^p \,\text{mes}\,(I \cap A_i \cap A_{i'j}) \\ &\leqq \sum_{i=1}^{m} (2\alpha)^p \,\text{mes}\,(I \cap (A_i - A_{ij})) \\ &\leqq \frac{ml}{N} \cdot (2\alpha)^p \\ &< l \cdot \delta^p. \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Proposition 1. *Etant donné un élément f de S^*, la fonction d'ensemble $\varphi(A)$ définie pour tout sous ensemble mesurable A de R, telle que*

$$\varphi(A) = f(\chi(A))$$

possède les trois propriétés suivantes:

(*1*) *φ est additive.*

(*2*) *pour tout nombre positif ε, il existe un nombre positif η tel que*

$$\| \chi(A) \| < \eta \qquad \textit{entraîne} \ | \varphi(A) | < \varepsilon.^{2)}$$

(*3*) $\| \varphi \| = \| f \|$.

Démonstration: (1) et (2) sont évidentes.

Sur (3), premièrement nous montrons que

$$\| \varphi \| \leqq \| f \|.$$

2) $\| \chi(A) \|$ peut être remplacer par $\sup_I \text{mes}\,(A \cap I)$.

Au cas que $||\varphi||=0$, évidement on a $||\varphi||\leqq||f||$.

Supposons que $0<||\varphi||<+\infty$, et soit ε un nombre positif quelconque et plus petit que $||\varphi||$. Alors il existe une partition l-régulière

$$\{A_{ij} \mid i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n\}$$

de R telle que

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}}\geqq||\varphi||-\varepsilon. \tag{$*$}$$

Posons

$$\rho_j=\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{m}\dfrac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|^{q-1}}\right)^{-1} & \text{lorsque } \sum_{i=1}^{m}\dfrac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|^{q-1}}\neq 0\\ 0 & \text{lorsque} \quad '' \quad =0\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}(\rho_j)^{\frac{1}{p}}\dfrac{|\varphi(A_{ij})|^{q-1}}{|A_{ij}|^{q-1}}\cdot\dfrac{\overline{\varphi(A_{ij})}}{|\varphi(A_{ij})|} & \text{lorsque } \varphi(A_{ij})\neq 0\\ 0 & \text{lorsque } \varphi(A_{ij})=0\end{cases}$$

$$(\text{où } i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

Il existe un nombre $j_0(1\leqq j_0\leqq n)$ tel que $\rho_{j_0}\neq 0$, parce que $||\varphi||>\varepsilon$ et que, pour tout A, $|\varphi(A)|<+\infty$. Pour ce j_0, il existe un nombre $i_0(1\leqq i_0\leqq m)$ tel que

$$\varphi(A_{i_0j_0})\neq 0 \quad \text{donc } \alpha_{i_0j_0}\neq 0.$$

Posons

$$x(t)=\sum_{i,j=1}^{m,n}\alpha_{ij}\chi(A_{ij}; t)$$

alors nous avons

$$||x||=\sup_j\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ij}|^p|A_{ij}|\right)^{\frac{1}{p}}=1.$$

Concernant cette fonction $x(t)$

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{i,j=1}^{m,n}\alpha_{ij}\chi(A_{ij}; t)\\ &=\sum_{i,j=1}^{m,n}|\alpha_{ij}|\,|\varphi(A_{ij})|\\ \therefore\quad |f(x)|&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ij}|\,|\varphi(A_{ij})|\\ &=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ij}|\,|A_{ij}|^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{|\varphi(A_{ij})|}{|A_{ij}|^{\frac{1}{p}}}\\ &=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ij}|^p|A_{ij}|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Nous avons

$$\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ij}|^p|A_{ij}|=\begin{cases}1 & \text{lorsque } \sum_{i=1}^{m}\dfrac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|^{q-1}}\neq 0\\ 0 & \text{lorsque} \quad '' \quad =0\end{cases}$$

par conséquent

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ij}|^p|A_{ij}|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}}\geqq||\varphi||-\varepsilon.$$

Donc nous avons

$$|f(x)| \geqq \|\varphi\| - \varepsilon.$$

Comme $\|x\|=1$ et comme ε est arbitraire, on a

$$\|f\| \geqq \|\varphi\|.$$

Enfin, supposons que $\|\varphi\| = +\infty$ alors on peut remplacer le coté droit de l'inégalité $(_*)$ par un nombre positif G quelconque. Alors nous avons

$$|f(x)| \geqq G.$$

Ce contredit que $\|f\| < +\infty$.

Deuxièmement, montrons que

$$\|\varphi\| \geqq \|f\|.$$

Soit $x = x(t)$ un élément quelconque de S. Par le lemme 1, et comme E est dense dans S, pour tout nombre positif ε, il existe une fonction l-régulière

$$x_0 = \sum_{i,j=1}^{m \cdot n} \alpha_{ij} \chi(A_{ij})$$

telle que

$$\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|+1}$$

et que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour ces x et x_0 nous avons

$$\begin{aligned} |f(x)| < |f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} &\leqq \sum_{i,j=1}^{m,n} |\alpha_{ij}|\,|\varphi(A_{ij})| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha_{ij}|^p\,|A_{ij}| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{|\varphi(A_{ij})|^q}{|A_{ij}|^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqq \|x_0\|\,\|\varphi\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqq \|x\|\,\|\varphi\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\|\varphi\| \geqq \|f\|. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Références

[1] A. S. Besicovitch: Almost Periodic Functions. Dover Publications. Inc., New York (1954).

[2] N. Dunford, J. T. Schwartz: Linear Operators. I. Interscience Publishers, Inc., New York (1958).

[3] E. Hewitt: Linear functionals on almost periodique functions. Trans. Amer. Math. Soc., **74**, 303-322 (1953).

[4] E. Følner: On the dual spaces on the Besicovitch almost periodic spaces. Dan. Mat. Fys. Medd., **29** (1), 27 (1954).