156. *Le principe de domination de Ninomiya pour les potentiels pris par rapport au noyau invariable de composition*

Par Masayuki ITÔ

Institut Mathématique, Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Oct. 12, 1967)

1. Nous prenons une fonction non-négative continue $\varphi(t)$ pour une variable réelle positive t telle qu'on ait $\lim_{t\to 0}\varphi(t)\geq 0$ et $lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$. Dans l'espace euclidien R^m à dimension $m(\geqq 3)$, nous considérons une fonction $k(x)=\varphi(|x|)$ et supposons toujours que $k(x)$ est localement sommable. Cette fonction k est appelée un noyau invariable de composition. Le potentiel et l'énergie d'une mesure positive μ pris par rapport au noyau k sont définis respectivement comme $k_\mu(x)=\int k(x-y)d\mu(y)=\int \varphi(|x-y|)d\mu(y)$ et $I_k(\mu)=\int k_\mu d\mu$. Spécialement, le potentiel d'ordre $\alpha(0<\alpha<m)$ d'une measure positive μ est défini comme $u_\mu^{(\alpha)}(x)=\int |x-y|^{\alpha-m}d\mu(y)$.

Le principe de domination: On dit que le noyau invariable de composition k satisfait au principe de domination si, quelles que soient μ et ν deux mesures positives, l'inégalité $k_\mu(x)\leq k_\nu(x)$ est satisfaite partout dans R^m dès qu'elle l'est sur le support S_μ de μ.

Dans ce mémoire, nous démontrerons les théorèmes suivants:

Théorémes 1. *Supposons que le noyau invariable de composition k satisfait au principe de domination, et soit $2\leq\alpha<m$. Quelles que soient μ et ν deux mesures positives dans R^m, l'inégalité $k_\mu(x)\leq u_\nu^{(\alpha)}(x)$ est satisfaite partout dans R^m dès qu'elle l'est sur S_μ.*

Théoréme 2. *Sous les conditions ci-dessus, quelles que soient μ et ν deux mesures positives dans R^m, l'inégalité $u_\mu^{(\alpha)}(x)\leq u_\nu^{(\alpha)}(x)$ est satisfaite partout dans R^m dès que l'inégalité $k_\mu(x)\leq k_\nu(x)$ est satisfaite sur S_μ.*

Ninomiya [9] a démontré les théorèmes ci-dessus dans le cas où $k(x)=|x|^{\alpha'-m}$, où $0<\alpha'\leq 2$ ou $0<\alpha'<m$ d'accord avec $m\geq 3$ ou $m=1, 2$. De plus, les formes plus générales de ces théorèmes ont été démontrées dans Ninomiya [10] et Itô [4].

En employant le théorème 1, nous obtiendrons le théorème suivant:

Théoréme 3. *Soit k un noyau invariable de composition satisfait au principe de domination. Pour un ensemble compact K, si la capacité $cap_k(K)$ de K pris par rapport au noyau k est* *positive, la capacite d'ordre α $cap^{(\alpha)}(K)$ de K est positive,*[1] *où* $2\leqq\alpha<m$.

2. Démonstration du théorème 1. Pour cela, les lemmes suivants sont nécessaires.

Lemme 1. *Supposons que le noyau invariable de composition k satisfait au principe de domination. Si k n'est pas égal à* 0, *k est un noyau d'un espace spécial de Dirichlet sur R^m.*[2]

En effet, k n'étant pas constant, en employant le théorème dans Itô [6], on peut associer une constante non-négative $c(k)$ telle que k-$c(k)$ soit un noyau d'un espace spécial de Dirichlet sur R^m. Depuis qu'on a $lim_{x\to\infty}k(x)=0$, on a $c(k)=0$, d'où k est un noyau d'un espace spécial de Dirichlet sur R^m.

De la théorie de l'espace spécial de Dirichlet, nous obtenons le suivant:

Lemme 2. *Sous les mêmes conditions qu'au lemme* 1, *à un ensemble fermé F et une mesure positive μ avec $I_k(\mu)<+\infty$, on peut associer une, et une seule mesure positive μ' avec $I_k(\mu')<+\infty$ portée par F telle qu'on ait $k_\mu(x)=k_{\mu'}(x)$ $k-p.p.p.$ sur F,*[3] *$u_\mu(x)\geq u_{\mu'}(x)$ partout dans R^m et $\int d\mu'\leq\int d\mu$.*

Voir Deny [3] et Itô [5].

Cette mesure positive μ' est appelé la mesure balayée de μ sur F. Ensuite, nous employons la notation $B(x, r)$ comme une boule ouverte à centre x et à rayon r.

Lemme 3. *Sous les mêmes conditions qu'au lemme* 1, *soient r_1 et r_2 deux nombres positifs. Supposons que μ est une mesure positive avec la densité $c_{B(0,r_1)}(x)$, où $c_{B(0,r_1)}(x)$ est la fonction caractéristique de $B(0, r_1)$. Alors, la mesure balayée μ' de μ sur le complément $CB(0, r_2)$ de $B(0, r_2)$ est dépendante seulement de la distance.*

En effet, nous obtenons que le potentiel k_μ est dépendant seulement de la distance. Soit σ un élément de la boule-unité à centre 0, et soient μ'_σ et $(k_{\mu'_\sigma})_\sigma$ respectivement une mesure positive obtenue de μ' et une fonction obtenue de $k_{\mu'_\sigma}$ par la rotation σ autour de 0. Depuis qu'on a

$$\begin{aligned}(u_{\mu'_\sigma})_\sigma(x)&=\int\varphi(|\sigma(x)-y|)d\mu'_\sigma(y)=\int\varphi(|\sigma(x)-\sigma(y)|)d\mu'(y)\\&=\int\varphi(|x-y|)d\mu'(y)=u_{\mu}'(x),\end{aligned}$$

nous obtenons l'égalité $u_{\mu'_\sigma}(x)=u_\mu(x)$ k-$p.p.p.$ sur $CB(0, r_2)$, d'où

1) Au sujet de la capacité, voir Brelot [1] et Ninomiya [7].

2) Au sujet d'un espace spécial de Dirichlet, voir Deny [3] et Itô [5].

3) On dit qu'une propriété est satisfaite k-$p.p.p.$ sur un sous-ensemble X de R^m si, pour toute mesure positive μ avec $I_k(\mu)<+\infty$ et $S_\mu\subset X$, cette propriété est satisfaite presque partout pour μ dans R^m.

$u_{\mu'}(x)=u_{\mu'_\sigma}(x)$ k-p.p.p. sur $CB(0, r_2)$, où $\sigma(x)$ est le point obtenu de x par la rotation σ autour de 0. $S_{\mu'_\sigma}$ étant dans $CB(0, r_2)$, on a $\mu'=\mu'_\sigma$, et par suite, la démonstration est complète.

Immédiatement du lemme ci-dessus, nous obtenons le lemme suivant:

Lemme 4. *Soit le noyau invariable de composition k un noyau de l'espace spécial de Dirichlet D sur R^m. A la boule $B(0, r)$, on peut associer une mesure positive ε'_0 portée par $CB(0, r)$ et dépendante seulement de la distance telle que $\int d\varepsilon'_0 \leq 1$ et que, pour toute fonction f finie et continue de D à support compact dont le spectrum est dans $CB(0, r)$,*[4] *on ait $f(0)=\int f(x)d\varepsilon'_0$.*

En effet, nous prenons une suite décroissante (r_n) des nombres positifs telles que $r_n<r$. Soit μ_n une mesure positive avec la densité $\left(\int c_{B(0,r_n)}dx\right)^{-1}c_{B(0,r_n)}(x)$, et soit μ'_n la mesure balayée de μ_n sur $CB(0, r)$. La suite (μ_n) converge vaguement vers la mesure-unité en 0, et depuis qu'on a $\int d\mu'_n \leq 1$ et que μ'_n est dépendante seulement de la distance, nous pouvons supposer que la suite (μ'_n) converge vaguement vers une mesure positive ε'_0 portée par $CB(0, r)$ et dépendante seulement de la distance avec $\int d\varepsilon'_0 \leq 1$. Pour toute fonction f finie et continue de D à support compact dont le spectrum est dans $CB(0, r)$, on a $\int f d\mu_n=\int f d\mu'_n$, d'où $f(0)=\int f d\varepsilon'_0$.

Démonstration du théorème 1. Pour deux mesures positives μ et ν, supposons que $k_\mu(x)\leq u_\nu^{(\alpha)}(x)$ sur S_μ. Nous pouvons supposer que $I_k(\mu)<+\infty$ et S_μ est compact. Parce que, en général, il existe une suite (μ_n) des mesures positives à support compact avec $I_k(\mu_n)<+\infty$ telle qu'on ait $\lim_{n\to\infty}k_{\mu_n}(x)=k_\mu(x)$ et $k_{\mu_n}(x)\leq k_\mu(x)$. Il est suffisant de démontrer dans le cas où $\mu\neq 0$, que k_μ est finie et continue et qu'on ait $k_\mu(x)<u_\nu^{(\alpha)}(x)$ sur S_μ. Parce que, en général, d'abord nous prenons une suite décroissante (e_n) des ensembles mesurables pour μ telle qu'on ait $0<\mu(e_n)<1/2n$, et soit ν_n la restriction de μ sur Ce_n. Alors, on a $k_{\nu_n}(x)<k_\mu(x)$ et $I_k(\nu_n)<+\infty$. Le noyau invariable de composition k satisfaisant au principe de continuité,[5] en employant la méthode ordinaire dans la théorie du potentiel (cf. Ninomiya [7]),

4) Au sujet du spectrum d'une fonction de D, voir Deny [3] et Itô [5].

5) On dit que le noyau invariable de composition k satisfait au principe de continuité si, quelle que soit μ une mesure positive à support compact, le potentiel k_μ est fini et continu dans R^m dès qu'il l'est comme une fonction définie sur S_μ. Depuis que k satisfait au principe de domination, k satisfait au principe de continuité (cf. Ninomiya [7]).

à la mesure positive ν_n, on peut associer une mesure positive μ_n telle qu'on ait $\nu_n \geq \mu_n, \int d\nu_n < \int d\mu_n + 1/2n$ et que k_{μ_n} soit finie et continue. Depuis que la suite (μ_n) converge vaguement vers μ et $\mu \geq \mu_n$, on a $\lim_{n\to\infty} k_{\mu_n}(x) = k_\mu(x)$. D'après la continuité de k_μ, il existe un voisinage ouvert V de S_μ tel que $k_\mu(x) \leq u_\nu^{(\alpha)}(x)$ dans V. Supposons qu'il existe un point où $k_\mu - u_\nu^{(\alpha)}$ prenne une valeur positive. Alors, il existe une fonction f finie, continue et non-négative à support compact avec $\int f\,dx = 1$ telle que $S_{\mu*f}$ appartient à V et que la fonction $k_{\mu*f} - u_\nu^{(\alpha)}$ prenne une valeur positive en ce point. Depuis que nous pouvons supposer que le potentiel $u_\nu^{(\alpha)}$ est borné, convergant vers 0 à l'infini et que $k_{\mu*f}$ converge vers 0 à l'infini,[6] il existe un point x_0 dans $CS_{\mu*f}$ tel qu'on ait

$$k_{\mu*f}(x_0) - u_\nu^{(\alpha)}(x_0) = \sup \{k_{\mu*f}(x) - u_\nu^{(\alpha)}(x);\ x \in R^m\} < 0.$$

Nous pouvons supposer $x_0 = 0$ par la translation voulue. Pour une boule $B(0, r)$ telle que $\overline{B(0, r)} \subset S_{\mu*f}$, soit ε_0' la mesure positive comme dans le lemme 4. En employant le lemme 4 et que $k_{\mu*f}$ converge vers 0 à l'infini, on a

$$k_{\mu*f}(0) = \int k_{\mu*f}(x) d\varepsilon_0'(x). \tag{1}$$

D'autre part, depuis que nous pouvons supposer que $u_\nu^{(\alpha)}$ est non-harmonique dans $B(0; r)$, en employant $\int d\varepsilon_0' \leq 1$ et que ε_0' est dépendante seulement de la distance, on a

$$u_\nu^{(\alpha)}(0) > \int u_\nu^{(\alpha)}(x) d\varepsilon_0'(x). \tag{2}$$

L'égalité (1) et l'inégalité (2) sont en contradiction avec notre supposition que la fonction $k_{\mu*f} - u_\nu^{(\alpha)}$ prenne le maximum en 0. La démonstration est complète.

Le théorème 2 est immédiatement suivi du théorème de Ninomiya (cf. Ninomiya [7]) et du théorème ci-dessus.

Corollaire. *Supposons que le noyau invariable du composition k satisfait au principe de domination, k converge vers* 0 *à l'infini.*

En effet, pour toute fonction f bornée, non-négative et mesurable à support compact, le potentiel k_f étant fini et continu employant le théorème 1, k_f converge vers 0 à l'infini. Depuis que la fonction f est arbitraire, nous obtenons que k converge vers 0 à l'infini.

3. Démonstration du théoréme 3. Pour un ensemble compact K, supposons que $\mathrm{cap}_k(K) > 0$. Alors, ie existe une mesure positive et non-zéro μ_K portée par K telle que le potentiel k_{μ_K} soit fini et

6) Voir Ito [4].

continu dans R^m, parce que le noyau k satisfait au principe de domination (cf. Ninomiya [6]). Soit $2 \leq \alpha < m$. Nous prenons un autre ensemble compact F tel qu'on ait $F \subset K$. En employant le théorème 1 et le théorème de Ninomiya dans [7], nous obtenons qu'il existe une, et une seule mesure positive ν portée par F telle qu'on ait (i) $k_\nu(x) = |x|^{\alpha-m}$ k-p.p.p. on F, (ii) $k_\nu(x) \leqq |x|^{\alpha-m}$ partout dans R^m. Alors, $I_k(\mu_K)$ étant finie, on a

$$\iint |x-y|^{\alpha-m} d\mu_K(y) d\mu_K(x) = \iint k_\nu(x-y) d\mu_K(y) d\mu_K(x)$$
$$= \iint k_{\mu_K * \mu_K}(x) d\nu(x) < +\infty,$$

où μ_K est une mesure positive telle qu'on ait $\mu_K(e) = \mu_K(-e)$ pour tout ensemble compact e, d'où on a $\mathrm{cap}^{(\alpha)}(K) \neq 0$, et par suite, la démonstration est complète.

Références

[1] M. Brelot: Elémente de la théorie classique du potentiel. Les cours de Sorbonne, 3e cycle, Centre de Documentation Universitaire. Paris (1961).

[2] G. Choquet et J. Deny: Aspectes linéaires de la théorie du potentiel. II. C. R. Acad. Sc. Paris, **243**, 4260-4261 (1960).

[3] J. Deny: Sur les espaces de Dirichlet. Sém. théorie du potentiel, n°5 (1957).

[4] M. Itô: Remarks on Ninomiya's domination principle. Proc. Japan Acad., **40**, 743-746 (1964).

[5] ——: Characterizations of supports of balayaged mesures. Nagoya Math. J., **28**, 203-230 (1966).

[6] ——: Note sur les espaces spéciaux de Dirichlet. Proc. Japan Acad., **43**, 429-434 (1967).

[7] N. Ninomiya: Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique. J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., **8**, 174-179 (1957).

[8] ——: Sur le problème du balayage généralisé. J. Math. Osaka City Univ., **12**, 115-138 (1961).

[9] ——: Sur un principe du maximum dans la théorie du potentiel. Ibid., **13**, 139-143 (1961).

[10] ——: Sur un principe du maximum pour le potentiel de Riesz-Frostman. Ibid., **13**, 57-62 (1962).