189. *Sur la convergence des séries de Fourier*

Par Tokui SATŌ

Départment de Mathématiques, Université de Kōbe

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Nov. 13, 1967)

1. Introduction. Soient $f(x)$ et

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

une fonction appartenant à $L(-\pi, \pi)$ et sa série de Fourier.

Pour la convergence de la série (1), il y a plusieurs critères, par exemple: les critères de Dini, de Jordan, et de Lebesgue etc., d'autre part M. A. Kolmogoroff a donné la série célèbre de Fourier divergente partout [2]. Cependant M. L. Carleson a démontré récemment le théorème suivant [1].

Théorème de Carleson. *Si $f(x)$ appartient à $L^2(-\pi, \pi)$, la série de Fourier* (1) *converge vers $f(x)$ presque partout.*

Il est donc intéressant de rechercher la convergence de série de Fourier de $f(x) \in L^p(-\pi, \pi)$ $(p \geqq 1)$.

2. Nous donnons d'abord le théorème suivant.

Théorème 1. *Soient $f(x)$ une fonction appartenant à $L(-\pi, \pi)$ et λ un nombre positif.*

La série de Fourier (1) *de $f(x)$ converge vers S en tout point tel que l'intégrale*

$$\int_0^h \frac{|\varphi(x, t) - S|}{t^\lambda} dt \qquad (0 < h < \pi/2)$$

existe, où

$$\varphi(x, t) = (f(x+2t) + f(x-2t))/2.$$

Preuve. Posons

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\psi_\lambda(t) = \int_0^t \frac{|\varphi(x, t) - S|}{t^\lambda} dt.$$

On a alors

$$S_n(x) - S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\varphi(x, t) - S) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

Supposons que l'intégrale $\int_0^h \frac{|\varphi(x, t) - S|}{t^\lambda} dt$ existe en x. D'après l'hypothèse, pour un nombre positif ε donné à l'avance, on peut prendre δ telle manière que

$$0 \leqq \psi_\lambda(t) < \varepsilon t$$

pour

$$0<t\leqq\delta<1.$$

Fixons δ, on peut obtenir N tel que

$$0<\pi/(2n+1)<\delta \qquad n\geqq N.$$

Posons

$$\int_0^{\pi/2}(\varphi(x,t)-S)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$$
$$=\left(\int_0^{\pi/(2n+1)}+\int_{\pi/(2n+1)}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi/2}\right)(\varphi(x,t)-S)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt.$$

On obtient alors

$$\int_{\delta}^{\pi/2}(\varphi(x,t)-S)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt\longrightarrow 0 \qquad (n\longrightarrow+\infty),$$

$$\left|\int_0^{\pi/(2n+1)}(\varphi(x,t)-S)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt\right|$$
$$\leqq\int_0^{\pi/(2n+1)}\frac{|\varphi(x,t)-S|}{t^{\lambda}}\left(\frac{(2n+1)t}{2t/\pi}\right)t^{\lambda}dt$$
$$=\frac{(2n+1)\pi}{2}\int_0^{\pi/(2n+1)}\frac{|\varphi(x,t)-S|}{t^{\lambda}}t^{\lambda}dt$$
$$\leqq\frac{(2n+1)\pi}{2}\left\{[\psi_{\lambda}(t)t^{\lambda}]_0^{\pi/(2n+1)}+\lambda\int_0^{\pi/(2n+1)}\psi_{\lambda}(t)t^{\lambda-1}dt\right\}$$
$$\leqq\frac{\varepsilon(2n+1)\pi^{2+\lambda}}{2}\left\{\frac{1}{(2n+1)^{1+\lambda}}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\,\frac{1}{(2n+1)^{1+\lambda}}\right\}$$
$$=\frac{\varepsilon\pi^{2+\lambda}}{2}\left(1+\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\frac{1}{(2n+1)\lambda}\longrightarrow 0 \qquad (n\longrightarrow+\infty)$$

et

$$\left|\int_{\pi/(2n+1)}^{\delta}(\varphi(x,t)-S)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt\right|$$
$$\leqq\int_{\pi/(2n+1)}^{\delta}\frac{|\varphi(x,t)-S|}{t^{\lambda}}\,\frac{1}{2t/\pi}t^{\lambda}dt$$
$$\leqq\frac{\pi}{2}\left\{[\psi_{\lambda}(t)t^{-1+\lambda}]_{\pi/(2n+1)}^{\delta}+\left|\int_{\pi/(2n+1)}^{\delta}\psi_{\lambda}(t)t^{\lambda-2}dt\right|\right\}$$
$$\leqq\frac{\varepsilon\pi}{2}\{\delta^{\lambda}+\delta^{\lambda}\}=\varepsilon\delta^{\lambda}\pi.$$

Par suite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x)-S)=0.$$

Remarque. Au cas de $\lambda=1$, le théorème 1 est le critère de Dini.

Lemme. *Soit* $f(x)\in L^p(a,b)$ $(p>1)$ *une fonction non négative dans* $a\leqq x\leqq b$.

Si l'on a $0<\lambda<1/q$ $(1/p+1/q=1)$, *l'intégrale*

$$\int_a^{a+h}\frac{f(x)}{(x-a)^{\lambda}}dx \qquad (0<h\leqq b-a)$$

existe.

En effet, on peut prendre $a=0$ sans perdre la généralité. En vertu de l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_0^h \frac{f(x)}{x^\lambda}dx \leqq \left\{\int_0^h f^p(x)dx\right\}^{1/p}\left\{\int_0^h x^{-\lambda q}\,dx\right\}^{1/q}$$
$$=\left\{\int_0^h f^p(x)dx\right\}^{1/p}\left\{\frac{h^{1-\lambda q}}{1-\lambda q}\right\}^{1/q}.$$

D'après le théorème 1 et ce lemme, on obtient immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2. *Soit $f(x)$ une fonction appartenant à $L^p(-\pi,\pi)$ $(p>1)$. Alors la série de Fourier de $f(x)$ converge vers $f(x)$ presque partout.*

Remarque. Le théorème de Carleson est donc un cas spécial $(p=2)$ du théorème 2.

3. Nous donnons enfin une application de théorème 2.

Théorème 3. *Soient $f(x)\in L^p(-\pi,\pi)$, $g(x)\in L^q(-\pi,\pi)$ $(p>1$, $1/p+1/q=1)$, (1) et*

$$g(x)\sim\frac{a'_0}{2}+\textstyle\sum_{n=1}^\infty (a'_n\cos nx+b'_n\sin nx) \tag{2}$$

les séries de Fourier de $f(x)$ et de $g(x)$ respectivement. On a alors la série de Fourier de $f(x)g(x)$

$$f(x)g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\textstyle\sum_{n=1}^\infty (\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx), \tag{3}$$

où

$$\alpha_n=\frac{a_0a'_n}{2}+\frac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^\infty \{a_k(a'_{n+k}+a'_{n-k})+b_k(b'_{n+k}-b'_{n-k})\} \quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{4}$$

$$\beta_n=\frac{a_0b'_n}{2}+\frac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^\infty \{a_k(b'_{n+k}+b'_{n-k})-b_k(a'_{n+k}-a'_{n-k})\} \quad (n=1,2,\cdots), \tag{5}$$

$$(a'_{-n}=a'_n,\ b'_{-n}=-b'_n).$$

Preuve. D'après l'hypothèse $f(x)g(x)$ est mesurable dans $[-\pi,\pi]$, et on a l'inégalité

$$\left|\int_{-\pi}^\pi f(x)g(x)dx\right|$$
$$\leqq\left\{\int_{-\pi}^\pi |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}\left\{\int_{-\pi}^\pi |g(x)|^q dx\right\}^{1/q}.$$

Par suite, la série de Fourier (3) est définie. Pour $n\in\{0,1,2,\cdots\}$, on prend $m>n$. Par définition on a

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi (f(x)-S_m(x))g(x)\cos nx\,dx$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi S_m(x)g(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

où

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^m (a_k \cos kx+b_k \sin kx).$$

En vertu de l'inégalité de Hölder, on a

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_m(x))g(x)\cos nx\,dx\right|$$
$$\leqq\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_m(x)|^p dx\right\}^{1/p}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^q dx\right\}^{1/q}.$$

D'après le théorème 2, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_m(x)|^p dx\to 0 \qquad (m\to\infty).$$

Puisque l'on a

$$S_m(x)\cos nx$$
$$=\frac{a_0}{2}\cos nx+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m a_k(\cos (n+k)x+\cos (n-k)x)$$
$$+b_k(\sin (n+k)x-\sin(n-k)x),$$

on obtient

$$\alpha_n=\frac{a_0a_n'}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\{a_k(a_{n+k}'+a_{n-k}')+b_k(b_{n+k}'-b_{n-k}')\}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_m(x))g(x)\cos nx\,dx$$
$$(n=0, 1, 2, \cdots),$$

on a donc (4).

De même nous obtenons (5).

Corollaire 1. *Sous l'hypothèse de théorème* 3, *on obtient*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=\frac{a_0a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n'+b_nb_n'). \tag{6}$$

En effet, puisque $\alpha_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$, en vertu de (4), on obtient (6).

Corollaire 2. (*Parseval*) *Soient* $f(x)\in L^2(-\pi,\pi)$ *et* (1) *la sèrie de Fourier de* $f(x)$. *On a alors*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Références

[1] L. Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math., **116** (1966).

[2] A Kolmogoroff: Une série de Fourier Lebesque divergente partout. C. R., **183** (1926).