73. *Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà.* VI

Von Harry POPPE

Sektion Mathematik, Ernst-Moritz Arndt Universität, D. D. R.

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., May 13, 1968)

Wir ziehen zum Schluss noch einige Folgerungen aus (6) Y,Z seien L-Räume, Z erfülle das Axiom L III und sei Hausdorffsch (Axiom LT_2). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(I) Es sei lim eine Limesabbildung für $C(Y, Z)$, die größer als die Limesabbildung p-lim der punktweisen Konvergenz ist (d.h. aus der Konvergenz bezüglich lim folgt die Konvergenz bezüglich p-lim). Es sei $(C(Y, Z), \lim)$ ein L-Raum. Ist dann $H \subset C(Y, Z)$ bezüglich lim kompakt, so folgt, daß H gleichstetig ist.

(II) Für jeden L-Raum X mit der Eigenschaft, daß jeder konvergente Ultrafilter in X eine kompakte Menge enthält, gilt: Ist $\tilde{f} \in C(X, (C(Y, Z), \lim))$, so folgt $f = h^{-1}(\tilde{f}) \in C(X \times Y, Z)$. (Es ist $f(x, y) = \tilde{f}(x)(y)$). Die Aussage (6) gilt insbesondere, wenn Y ein beliebiger topologischer Raum, Z ein Hausdorffscher topologischer Raum und lim die einer Topologie τ für $C(Y, Z)$ (mit $\tau \supset \tau_p$, τ_p die Topologie der punktweisen Konvergenz) unterliegende Topologie ist.

Für τ_c erhält man:

(12) Y sei ein beliebiger, Z ein Hausdorffscher topologischer Raum. Dann sind die Aussagen äquivalent:

(I) Jede bezüglich τ_c kompakte Menge $H \subset C(Y, Z)$ ist gleichstetig (evenly continuous).

(II) Für jeden topologischen Raum X mit der Eigenschaft, daß jeder konvergente Ultrafilter eine kompakte Menge von X enthält, gilt: $h(C(X \times Y, Z)) = C(X, (C(Y, Z), \tau_c))$. Ist $H \subset C(Y, Z)$ τ_c-kompakt, so folgt (a): H ist abgeschlossen in $C(Y, Z)$ bezüglich τ_c, (b): $\overline{H(y)}$ ist kompakt für jedes $y \in Y$. Ist nun Z zusätzlich regulär und gelten für $H \subset C(Y, Z)$ die Bedingungen (a), (b), und (c): H ist gleichstetig, so folgt aus Satz (11), (III), 1., β), daß H kompakt bezüglich τ_c ist. Ferner erfüllt jeder kompakte Raum X die in (II) genannte Bedingung: (+) Jeder konvergente Ultrafilter in X enthält eine kompakte Menge. Folglich erhält man als Spezialfall den Satz (5) von Noble.

Aus (12) und aus (11), (III), 2. erhalten wir

(13) X, Y, Z seien topologische Räume, X genüge der Bedingung (*), Y sei ein Hausdorffscher k-Raum und Z sei Hausdorffsch. Dann

gilt ($\circledast$) $h(C(X\times Y), Z)=C(X, C(Y, Z), \tau_c)$.

Bemerkung: Offenbar erfüllt jeder lokalkompakte Raum X die Bedingung ($*$). Wir vermuten, daß die Bedingung ($*$) allgemeiner ist; jedoch ist es uns noch nicht gelungen, ein Beispiel eines, insbesondere Hausdorffschen und regulären Raumes anzugeben, der nicht lokalkompakt ist, aber ($*$) erfüllt. Für Hausdorffsche lokalkompakte X ist (13) ein Ergebnis von Morita (man vergleiche [3], Korrolar 1.9; [3] enthält Untersuchungen über die Gültigkeit von ($\circledast$); diese Ergebnisse werden in [7] weitergeführt und verallgemeinert).

Wir übertragen nun noch den bekannten Satz: "Das kartesische Produkt eines Hausdorffschen lokalkompakten Raumes mit einem Hausdorffschen k-Raum ist ein Hausdorffscher k-Raum" (siehe etwa [2] oder [4]) auf Räume, die ($*$) genügen. Wir übertragen dabei den Beweis in [2].

(14) X und Y seien Hausdorffsche Räume, X genüge der Bedingung ($*$) und Y sei ein k-Raum. Dann ist auch $X\times Y$ ein k-Raum.

Beweis: Es sei $C\subset X\times Y$ und $C\cap K$ sei abgeschlossen für jede kompakte Menge $K\subset X\times Y$; sei $(x, y)\in \bar{C}$; dann gibt es einen Ultrafilter π in $X\times Y$ mit $C\in\pi$ und $\pi\to(x, y)$; wir setzen $\pi_1=pr_X\pi$, $\pi_2=pr_Y\pi$; π_1 ist Ultrafilter in X mit $\pi_1\to x$ und $pr_XC\in\pi_1$; nach Voraussetzung existiert dann eine kompakte Menge $K_1\subset X$ mit $K_1\in\pi_1$; wir zeigen, daß $x\in pr_X\,(C\cap(K_1\times\{y\}))$ gilt: U sei eine beliebige Umgebung von x; da X regulär ist, existiert eine Umgebung V von x mit $\bar{V}\subset U$; sei $V_1=K_1\cap\bar{V}$; dann gilt V_1 ist kompakt, $V_1\subset K_1$, $V_1\subset U$, $V_1\in\pi_1$, und $x\cap\bar{V}_1$, denn wegen $K_1=\bar{K}_1$ und $\pi_1\to x$ gilt $x\in K_1$; es sei $S=pr_Y(C\cap(V_1\times Y))$; L sei eine beliebige kompakte Teilmenge von Y; es ist $S\cap L=pr_Y(C\cap(V_1\times L))$; nach der Voraussetzung über C ist $C\cap(V_1\times L)$ abgeschlossen und somit kompakt, folglich ist $S\cap L$ kompakt und damit abgeschlossen in Y; da Y ein k-Raum ist, ist somit S abgeschlossen. W sei eine beliebige Umgebung von y, dann gilt $C\cap(V_1\times W)\neq\phi$: es gilt $\pi_2\to y$, also $W\in\pi_2$, wegen $V_1\in\pi_1$ gilt also $V_1\times W\in\pi_1\times\pi_2\subset\pi$, wegen $C\in\pi$ folgt $C\cap(V_1\times W)\neq\phi$; folglich ist auch $S\cap W=pr_Y(C\cap(V_1\times W))\neq\phi$; damit gilt $y\in S$. Es existiert dann ein $x_1\in X$ mit $(x_1, y)\in C\cap(V_1\times Y)$, also ist $x_1\in K_1$ und $x_1\in U$; folglich gilt $x_1\in pr_X(C\cap(K_1\times\{y\}))\cap U$; nach obiger Schlußweise ist $pr_X(C\cap(K_1\times\{y\}))$ abgeschlossen und, da jede Umgebung von x diese Menge schneidet, gilt $x\in pr_X(C\cap(K_1\times\{y\}))$; daraus folgt aber $(x, y)\in C$, d.h. C ist abgeschlossen.

Wir weisen zum Abschluß noch auf folgendes hin: In [8], (3.2a) genügt es, wenn L' ein L-Raum ist (und nicht wie dort ein LT_2-Raum); in (3.3) muß man L' als U-Raum (und nicht als L-Raum) voraussetzen (entsprechend muß in [9], (8) Y ein U-Raum sein) und in (3.3a) muß

L' ein topologischer Raum (statt ein U-Raum) sein.

References

[1] R. Arens and J. Dugundji: Topologies for function spaces. Pacific J. Math., **1**, 5-31 (1951).

[2] R. W. Bagley and J. S. Yang: On k-spaces and function spaces. Proc. Amer. Math. Soc., **17**, 703-705 (1966).

[3] R. Brown: Function spaces and product topologies. Quart. J. Math. (Oxford), **15**, 238-250 (1964).

[4] J. Dugundji: Topology. Boston (1966).

[5] D. Gale: Compact sets of functions and function rings. Proc. Amer. Math. Soc., **1**, 303-308 (1950).

[6] J. L. Kelley: General Topology. Princeton, N. J. (1957).

[7] N. L. Noble: k-Spaces and Some Generalizations. Dissertation, The University of Rochester, Rochester, New York (1967).

[8] H. Poppe: Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà. Math. Nachr., **30**, 87–122 (1965).

[9] ——: Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelà. II. Monatsber. Deutsche Akademie der Wiss. zu Berlin, **8**(4), 259–264 (1966).

[10] ——: Ein Kompaktheitskriterium für Abbildungsräume mit einer verallgemeinerten uniformen Struktur. Proc. Second. Prague Topol. Symp. (1966).

[11] ——: Stetige Konvergenz und Satz von Ascoli und Arzelà. III, IV. Proc. Japan Acad., **44**, 223–239, 240–242 (1968).