

84. Remarque sur la somme d'un noyau de Dirichlet et du noyau newtonien

Par Masayuki ITO

Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., April 13, 1970)

1. Soit R^n l'espace euclidien à $n (\geq 3)$ dimensions. Dans l'article précédent [2], on fournit une condition suffisante pour qu'un noyau de Frostman-Kunugi sur R^n soit un noyau de Dirichlet et une question sur la somme d'un noyau de Dirichlet sur R^n et du noyau newtonien sur R^n .

Dans cette note, on se propose de montrer que si toute la somme positivement linéaire d'un noyau de Dirichlet sur R^n , invariant par rotations, et du noyau newtonien est aussi un noyau de Dirichlet, ce noyau de Dirichlet est un noyau de Frostman-Kunugi.

Rappelons qu'un noyau de Dirichlet κ sur R^n est une mesure de Radon positive sur R^n et dont la transformation de Fourier est de la forme $\hat{\kappa} = 1/\lambda$, où λ est une fonction définie-négative sur R^n , à valeurs réelles, telle que $1/\lambda$ soit localement sommable (voir [1]). Une mesure de Radon positive κ sur R^n s'appelle un noyau de Frostman-Kunugi si elle est invariante par rotations, tend vers 0 à l'infini¹⁾ et satisfait à la condition suivante: $\Delta\kappa \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine 0, où Δ est l'opérateur de Laplace (voir [2]).

2. On commencera avec les deux propositions connues.

Proposition 1 (cf. [2]). *A un noyau de Frostman-Kunugi $\kappa_1 (\neq 0)$ sur R^n (resp. à un noyau de Dirichlet κ_1 sur R^n et invariant par rotations), on peut associer un noyau de Dirichlet κ_2 sur R^n , invariant par rotations (resp. un noyau de Frostman-Kunugi κ_2 sur R^n), et un seul tel que l'on ait*

$$\kappa_1 * \kappa_2 = N, \quad (1)$$

où N est le noyau newtonien sur R^n .

Proposition 2 (cf. [1]). *Soit $\kappa (\neq 0)$ une mesure de Radon positive sur R^n symétrique par rapport à l'origine 0. Pour que κ soit un noyau de Dirichlet sur R^n , il faut et il suffit qu'il existe une famille $(\kappa_p)_{p \geq 0}$ des mesures de Radon positives sur R^n et telle que $\kappa_0 = \kappa$ et que, quels que soient $p \geq 0, q > 0$,*

$$\kappa_p - \kappa_q = (q-p)\kappa_p * \kappa_q. \quad (2)$$

1) Cela signifie que, quelle que soit φ une fonction finie, continue dans R^n , à support compact, $\lim_{x \rightarrow \infty} \kappa * \varphi(x) = 0$.

Théorème. Soit κ un noyau de Dirichlet sur R^n et invariant par rotations. Si, quels que soient a, b de nombres non-négatifs avec $(a, b) \neq (0, 0)$, $a\kappa + bN$ est un noyau de Dirichlet sur R^n , κ est alors un noyau de Frostman-Kunugi.

Corollaire. Sous la même condition que ci-dessus, κ est égal à une fonction finie et continue en dehors de l'origine.

Démonstration du théorème. D'après la proposition 1, pour un nombre $p > 0$, il existe un noyau de Frostman-Kunugi κ'_p sur R^n , et un seul tel que l'on ait

$$(\kappa + pN) * \kappa'_p = N. \quad (3)$$

On montrera que la famille (κ'_p) satisfait à l'égalité (2). Si $p > 0$, on a $p \int d\kappa'_p \leq 1$, car $pN * \kappa'_p \leq N$. Pour un nombre $q > 0$,

$$(\kappa + qN) * \kappa'_q = N. \quad (4)$$

D'après (3), (4) et du fait que la masse totale de κ_q est finie, on a

$$\kappa * \kappa'_p + p\kappa * \kappa'_q * \kappa'_p + pqN * \kappa'_q * \kappa'_p = N \quad (5)$$

et

$$\kappa * \kappa'_q + q\kappa * \kappa'_p * \kappa'_q + pqN * \kappa'_p * \kappa'_q = N. \quad (6)$$

En faisant (5)–(6), on obtient l'égalité

$$\kappa * (\kappa'_p - \kappa'_q) = (q-p)\kappa * \kappa'_p * \kappa'_q. \quad (7)$$

D'après le principe de l'unicité pour κ , on arrive à l'égalité

$$\kappa'_p - \kappa'_q = (q-p)\kappa'_p * \kappa'_q. \quad (8)$$

En utilisant la proposition 2 et ensuite la proposition 1, on met en évidence que κ est un noyau de Frostman-Kunugi.

Notre corollaire est un résultat immédiat du fait que κ est invariant par rotations et que l'on a $\Delta\kappa \geq 0$ au sens des distributions dans $R^n - \{0\}$.

Références

- [1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., **45**, 208–215 (1959).
- [2] M. Itô: Sur les noyaux de Frostman-Kunugi et les noyaux de Dirichlet (à paraître).