83. *Remarque sur les espaces fonctionnels de type L^2*

Par Masayuki ITO
Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., April 13, 1970)

1. Soit X un espace localement conpact à base dénombrable, et soit ξ une mesure de Radon positive sur X. Rappelons qu'un espace fonctionnel $\mathfrak{X}$ (relatif à X et à ξ) est un espace hilbertien dont tout l'élément est une fonction localement ξ-sommable dans X, à valeurs réelles, et qui satisfait à la condition suivante:

(a) Pour un compact K de X, il existe une constante $A(K)>0$ telle que l'on ait, quelle que soit u de $\mathfrak{X}$,

$$\int_K |u|\,d\xi \leqq A(K)\|u\| \tag{1}$$

(voir [1] et [2]). On désigne respectivement par $\|\cdot\|$ et par $(\cdot,\cdot)$ la norme de $\mathfrak{X}$ et son produit scalaire.

Soit M la totalité de fonctions ξ-mesurables, bornées dans X, à valeurs réelles et à support compact, et M^+ est son sous-ensemble des fonctions $\geqq 0$. Il résulte de la condition (a) qu'à une fonction f de M, on peut associer une fonction u_f de $\mathfrak{X}$, et une seule telle que l'on ait, quelle que soit v de $\mathfrak{X}$,

$$(u_f, v)=\int vf\,d\xi, \tag{2}$$

et on appelle u_f le potentiel de f dans $\mathfrak{X}$. On dit que $\mathfrak{X}$ est à noyau positif si, quelle que soit f de $M^+, u_f \geqq 0$.

On connaît que la condition suivante (a′) est très pratique pour la théorie du potentiel dans $\mathfrak{X}$ (voir [2]).

(a′) A un compact K de X, on peut associer une constante $A'(K)>0$ telle que l'on ait, quelle que soit u de $\mathfrak{X}$,

$$\int_K |u|^2\,d\xi \leqq A(K)\|u\|^2. \tag{3}$$

On dit que $\mathfrak{X}$ est de type L^2 si $\mathfrak{X}$ satisfait à (a′), et on se propose de fournir une caractérisation pour que $\mathfrak{X}$ soit de type L^2.

2. On commencera avec la définition de noyau (relatif à X et à ξ) d'après [3]. Soit E la σ-algèbre constituée par tous les ensembles ξ-mesurables de X. Une fonction $N\geqq 0$ d'ensemble sur $E\times E$ s'appelle un noyau si, quel que soit e_0 un ensemble relativement compact de E, les applications: $e\to N(e_0, e)$, $e\to N(e, e_0)$ de E sont complètement additives et absolument continues par rapport à ξ. N est symétrique si, quels que soient e_1, e_2 de $E, N(e_1, e_2)=N(e_2, e_1)$. Pour une founction

f de M^+, l'intégrale $\int f(y)N(e, dy)$ a un sens, et l'application: $e \to \int f(y)N(e, dy)$ de E est complètement additive et absolument continue par rapport à ξ. Sa densité s'appelle le potentiel de f par rapport au noyau N, et il s'écrit N_f. Le potentiel N_f d'une fonction f de M par rapport au noyau N est définit par $N_f = N_{f^+} - N_{f^-}$.

Proposition. *A un espace fonctionnel $\mathfrak{X}$ à noyau positif (resp. à un noyau symétrique N de type positif), on peut associer un noyau symétrique N de type positif (resp. un espace fonctionnel $\mathfrak{X}$ à noyau positif), et un seul tel que l'on ait, quelle que soit f de M, le potentiel de f dans $\mathfrak{X}$ soit égal à N_f.*

On dit que N est de type positif si, quelle que soit f de M,

$$\iint f(x)f(y)N(dx, dy) = \int N_f(x)f(x)d\xi(x) \geqq 0. \tag{4}$$

Le noyau N dans la proposition s'appelle le noyau de $\mathfrak{X}$. En particulier, il existe un noyau U tel que, quelle que soit f de M, $U_f = f$, qui s'appelle le noyau de unité. $L^2(\xi)$ est l'espace fonctionnel dont le noyau est U. Notre théorème principal est le suivant:

Théorème. *Soient $\mathfrak{X}$ un espace fonctionnel à noyau positif et N son noyau. Pour que $\mathfrak{X}$ soit de type L^2, il faut et il suffit que, pour un compact K de X, il existe une constante $B(K) > 0$ telle que, quel que soit e de $E_K = \{e \in E\,;\, e \subset K\}$,*

$$N(e, e) \leqq B(K)\xi(e). \tag{5}$$

3. Avant sa démonstration, on montrera son corollaire.

Corollaire. *Si, quelle que soit f de M^+, le potentiel de f dans $\mathfrak{X}$ est localement borné, $\mathfrak{X}$ est alors de type L^2.*

En effet, pour un compact K de X, on désigne par c_K la fonction caractéristique de K, et on pose

$$B(K) = \operatorname*{ess.\,sup}_{x \in K} u_{c_K}(x). \tag{6}$$

On a alors, quel que soit e de E_K,

$$N(e, e) \leqq N(e, K) \leqq B(K)\xi(e). \tag{7}$$

Mais, son inverse n'a pas lieu. En effet, pour une fonction $n \geqq 0$ de $L^2(\xi)$, le noyau

$$N_n(e_1, e_2) = \left(\int_{e_1} n d\xi\right)\left(\int_{e_2} n d\xi\right) \tag{8}$$

est de type positif et satisfait à la condition (5). Mais il est évident qu'il existe une fonction $n \geqq 0$ de $L^2(\xi)$ et une fonction f de M^+ telles que $(N_n)_f$ ne soit pas localement borné.

4. On définit la multiplication de deux noyaux symétriques. Soient N_1 et N_2 deux noyaux symétriques, alors, quels que soient e_1, e_2 de E, l'intégrale

$$\int N_1(e_1, dy)N_2(dy, e_2) = \int (N_1)_{c_1}(x)(N_2)_{c_2}(x)d\xi(x) \tag{9}$$

a un sens, où c_i est la fonction caractéristique de $e_i (i=1,2)$. Si l'application

$$(e_1, e_2) \rightarrow N_1(e_1, dy) N_2(dy, e_2) \tag{10}$$

de $E \times E$ est un noyau, il s'écrit $N_1 \cdot N_2$.

Montrons notre théorème. On suppose d'abord que $\mathfrak{X}$ est de type L^2. Pour un compact K de X, on désigne par N_K la restriction de N sur $E_K \times E_K$, et N_K est alors un noyau relatif à K et à ξ. On a, quel que soit e de E_K,

$$N_K \cdot N_K(e, e) \leqq A'(K) N_K(e, e), \tag{11}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
&(A'(K))^2 \xi(e) - A'(K) N(e, e) \\
&= A'(K) N_K(e, e) - N_K \cdot N_K(e, e) + (A'(K)U - N_K) \cdot (A'(K)U - N_K)(e, e) \\
&\geqq 0,
\end{aligned}$$

d'où $N(e, e) \leqq A'(K) \xi(e)$.

Lemme. *Soit N un noyau symétrique de type positif, et supposons que, quelle que soit f de M,*

$$\iint f(x) f(y) N(dx, dy) \leqq \int |f(x)|^2 d\xi(x), \tag{12}$$

il existe alors un noyau symétrique $\tilde{N}$ de type positif et tel que l'on ait

$$U - N = (U - \tilde{N}) \cdot (U - \tilde{N}). \tag{13}$$

En effet, pour deux fonctions f, g de M, on a

$$\int N_f g \, d\xi \leqq \left(\int |f|^2 d \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 d \right)^{1/2}, \tag{14}$$

et on a donc $N_f \in L^2(\xi)$ et

$$\int |N_f|^2 d\xi \leqq \int |f|^2 d\xi, \tag{15}$$

d'où, quel que soit e de E,

$$N \cdot N(e, e) \leqq U(e, e) = \xi(e). \tag{16}$$

De la manière inductive, on a, pour un entier $n > 0$,

$$N^{(n)}(e, e) \leqq \xi(e), \tag{17}$$

où $N^{(n)} = N^{(n-1)} \cdot N$. Posons

$$\tilde{N}(e_1, e_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} 1/2 (1/2 - 1) \cdots (1/2 - i + 1)}{i\,!} N^{(n)}(e_1, e_2), \tag{18}$$

cela est alors un noyau symétrique de type positif, et on obtient immédiatement que $\tilde{N}$ satisfait à la formule (13).

On montrera finalement que la condition est suffisante. Soit K un compact de X, et soit $N'_K = (1/B(K)) N_K$, on a alors, quelle que soit f de $M_K = \{f \in M\,;\, S_f \subset K\}$,

$$\iint f(x) f(y) N'_K(dx, dy) \leqq \int |f|^2 d\xi. \tag{19}$$

D'après notre lemme, il existe un autre noyau symétrique $\tilde{N}'_K$ relatif à K et à ξ tel que

$$(U - \tilde{N}'_K) \cdot (U - \tilde{N}'_K) = U - N'_K. \tag{20}$$

Pour une fonction f de M_K, on a

$$\int_K |u_f|^2 d\xi = \int |(N_K)_f|^2 d\xi = \iint f(x)f(y)N_K \cdot N_K(dx, dy)$$
$$= (B(K))^2 \iint f(x)f(y)N'_K \cdot N'_K(dx, dy). \tag{21}$$

On a ensuite

$$\iint f(x)f(y)N'_K(dx, dy) - \iint f(x)f(y)N'_K \cdot N'_K(dx, dy)$$
$$= \iint f(x)f(y)N'_K \cdot (U - N'_K)(dx, dy)$$
$$= \iint f(x)f(y)N'_K \cdot (U - \tilde{N}'_K) \cdot (U - \tilde{N}'_K)(dx, dy)$$
$$= \iint (f(x) - (\tilde{N}'_K)_f(x))(f(y) - (\tilde{N}'_K)_f(y))N'_K(dx, dy)$$
$$\geqq 0, \tag{22}$$

d'où

$$\int_K |u_f|^2 d\xi \leqq B(K) \|u_f\|^2. \tag{23}$$

On pose $\mathfrak{X}_K = \overline{\{u_f \in \mathfrak{X}\,;\, f \in M_K\}}$, où l'adhérence est au sens de la topologie dans $\mathfrak{X}$. Pour chaque fonction u de $\mathfrak{X}_K$, il existe une suite (f_n) de M_K telle que (u_{f_n}) converge fortement vers u dans $\mathfrak{X}$ avec $n \to \infty$. Elle converge donc vers u presque partout pour ξ dans X. On a

$$\int_K |u_{f_n}|^2 d\xi \leqq B(K)(\sup_{1 \leqq m < \infty} \|u_{f_n}\|^2) < +\infty, \tag{24}$$

et la restriction de u_{f_n} sur K converge faiblement vers la restriction de u sur K dans $L^2(\xi)$ avec $n \to \infty$. Il en résulte que

$$\int_K |u|^2 d\xi \leqq \varliminf_{n\to\infty} \int_K |u_{f_n}|^2 d\xi \leqq B(K) \lim_{n\to\infty} \|u_{f_n}\|^2 = B(K)\|u\|^2. \tag{25}$$

Soit u une fonction de $\mathfrak{X}$, et on désigne par u' la projection de u sur le sous-espace $\mathfrak{X}_K$. On a alors $u' = u$ presque partout pour ξ sur K, et donc,

$$\int_K |u|^2 d\xi = \int_K |u'|^2 d\xi \leqq B(K)\|u'\|^2 \leqq B(K)\|u\|^2.$$

En posant $A'(K) = B(K)$, on arrive à la conclusion que $\mathfrak{X}$ satisfait à la condition (a').

Références

[1] N. Aronszajn et K. T. Smith: Characterization of positive reproducing kernels. Amer. J. Math., **79**, 611–622 (1957).

[2] J. Deny: Principe complet du maximum et contractions. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15**, 259–272 (1965).

[3] M. Itô: Sur les principes divers du maximum et le type positif (à paraître).