32. *Eine Bemerkung über Kogeneratoren*

Von Takeshi ONODERA
Mathematisches Institut, Hokkaido Universität

(Comm. by Kenjiro SHODA, M. J. A., Feb. 12, 1971)

Seien R ein Ring mit 1 Element, ${}_RM$ ein unitärer R-Linksmodul und $S=\mathrm{End}\,({}_RM)$ der Endomorphismenring von ${}_RM$. ${}_RM_S$ ist dann ein R-S-Bimodul. Ferner bezeichnen wir mit M^* und M^{**} das Duale und Biduale von ${}_RM: M^*=\mathrm{Hom}\,({}_RM, {}_RR)$, $M^{**}=\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Hom}\,({}_RM, {}_RR)_R, R_R)$. ${}_SM^*_R$ und ${}_RM^{**}_S$ sind dann in bekannter Weise S-R- und R-S-Bimoduln. Es gibt einen natürlichen (R-S-) Homomorphismus φ von M in M^{**}, der folgendermaßen definiert wird:

$$\varphi(x)=f(x),\ x\in M,\ f\in M^*.$$

${}_RM$ heißt torsionslos, wenn φ ein Monomorphismus ist, reflexiv, wenn φ ein Isomorphismus ist. Diese Begriffe stammen von H. Bass.

Ein Ring R heißt Linkskogenerator (Rechtskogenerator), wenn jeder R-Linksmodul (R-Rechtmodul) torsionslos ist. R ist (zweiseitiger) Kogenerator wenn R gleichzeitig Links- und Rechtskogenerator ist. Wenn R Kogenerator ist, dann sind ${}_RR$ sowie R_R injektiv ([3], Satz 2).

Das Ziel dieser Note besteht darin, folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1. *Sei R ein Ring, der (zweiseitiger) Kogenerator ist, und seien ${}_RM$ ein treuer R-Linksmodul sowie S der Endomorphismenring von ${}_RM$. Dann gilt: ${}_RM$ ist dann und nur dann reflexiv, wenn M_S injektiv ist.*

Den Beweis bereiten wir mit folgendem Lemma vor.

Lemma. *Seien R ein Ring, ${}_RM$ ein treuer torsionsloser R-Linksmodul und S der Endomorphismenring von ${}_RM$. Dann ist $\varphi(M)_S$ groß in M^{**}_S als S-Rechtsmodul.*

Beweis des Lemmas. Seien g ein beliebiges von Null verschiedenes Element von M^{**} und f_0 ein Element von M^*, so daß $g(f_0)\neq 0$. Da ${}_RM$ treu ist, gibt es $m_0\in M$, so daß $g(f_0)m_0\neq 0$. Sei s der Endomorphismus von ${}_RM$, der folgendermaßen definiert wird:

$$xs:=f_0(x)m_0,\ x\in M.$$

Da $(sf)(x)=f(xs)=f_0(x)f(m_0)=(f_0\cdot f(m_0))(x)$, $f\in M^*$, $x\in M$, gilt $sf=\cdot f_0\cdot f(m_0)$ für alle $f\in M^*$. Daraus folgt daß $(gs)(f)=g(sf)=g(f_0)f(m_0)=f(g(f_0)m_0)$. Das bedeutet, daß $(0\neq)\ gs=\varphi(g(f_0)m_0)\in gS\cap\varphi(M)$, und der Beweis ist damit vollständig.

Beweis des Satzes. Da R Kogenerator ist, ist ${}_RM$ torsionslos. Sei M_S injektiv. Dann ist $\varphi(M)_S$ injektiv und nach dem Lemma folgt $\varphi(M)=M^{**}$. Daraus folgt, daß φ Isomorphismus ist, das heißt, ${}_RM$

ist reflexiv. Sei umgekehrt ${}_RM$ reflexiv. Da ${}_RM$ treu ist, ist ${}_RM$ Generator ([3], Satz 5). Daraus folgt, daß M_S endlich erzeugt und projektiv ist und es gilt Hom $({}_RM, {}_RR) \cong$ Hom (M_S, S_S) als S-R-Bimoduln ([5], 2.5 Theorem).

Da ${}_S$Hom $({}_RM, {}_RR)$ projektiv und R_R injektiv ist, ist dann $M_S \cong$ Hom (Hom $({}_RM, {}_RR)_R, R_R)_S$ injektiv ([1], Proposition VI. 1.4).

Korollar 1. *Seien R quasi-Frobenius Ring und ${}_RM$ ein treuer R-Links-modul. ${}_RM$ ist dann und nur dann endlich erzeugt, wenn M_S injektiv ist.*

Beweis. Ein quasi-Frobenius Ring R ist notwendig ein Kogenerator und es ist wohl bekannt da jeder endlich erzeugte R-Modul reflexiv ist. Umgekehrt ist jeder reflexive R-Modul endlich erzeugt, da er einen endlich erzeugten Sockel hat ([4], Lemma 13). Dann folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Satz.

Korollar 2 (Villamayor). *Seien R ein Schiefkörper und ${}_RV$ ein unendlich-dimensionaler R-Linksverktorraum. Dann ist der* (*einfache*) *S-Linksmodul V_S nicht injektiv.*

Beweis. Da dann ${}_RV$ nicht reflexiv ist, ist M_S, wegen Korollar 1, nicht injektiv.

Wenn R quasi-Frobenius Ring ist, gilt auch folgender

Satz 2. *Sei ${}_RM$ ein projektiver R-Linksmodul. Dann ist $\varphi(M)_S$ groß in M_S^{**}.*

Beweis. Seien g ein beliebiges von Null verschiedenes Element von M^{**} und f_0 ein Element von M*, so daß $g(f_0) \neq 0$. Sei N_1 ein endlich erzeugter und projektiver Untermodul von M^*, der f_0R enthält. Es gibt ein solches N_1, da M_R^* injektiv und Sockel von f_0R endlich erzeugt ist. Nach ([3], Satz 1), gibt es einen Untermodul M_1 von ${}_RM$, so daß $M_R^* = N_1 \oplus M_1^\perp$ und ${}_RM = M_1 \oplus N_1^\perp$, wobei $M_1^\perp = \{f \in M^* ; f(x) = 0$ für alle $x \in M\}$, $N_1^\perp = \{x \in M : f(x) = 0$ für alle $f \in N_1\}$. M_1 und N_1 sind dann zueinander dual. Sei p die Projektion von M auf M_1. Es ist leicht zu sehen daß $pM^* = N_1$. Da M_1 endlich erzeugt und deshalb reflexiv ist, gibt es ein Element $x_0 \in M_1$ so daß $g(pf) = (pf)(x_0) = f(x_0)$ für alle $f \in M^*$, das heißt, $(gp)(f) = \varphi(x_0)(f)$ für alle $f \in M^*$. Da $(gp)(f_0) = g(pf_0) = g(f_0) \neq 0$, ist $gp \neq 0$, und damit ist der Beweis vollständig.

Literatur

[1] H. Cartan and S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton (1956).

[2] K. Morita: Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, **6**, No. 150, 83–142 (1958).

[3] T. Onodera: Über Kogeneratoren. Arch. Math., **19**, 402–410 (1968).

[4] B. L. Osofsky: A generalization of quasi-Frobenius rings. Jour. Algebra, **4**, 373–387 (1966).
[5] E. R. Willard: Properties of projective generators. Math. Ann., **158**, 352–364 (1965).