69. *Sur la transformation homogène du noyau de Dirichlet*

Par Yoshifusa ITO
Département de Physiologie, Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., March 12, 1971)

Soit $x \to Tx$ un isomorphisme de l'espace euclidien R^n à $n(\geqq 3)$ dimensions sur lui-même et qui applique un noyau positivement homogène à un noyau positivement homogène du même ordre. Alors, pour que l'isomorphisme applique la classe des noyau de Dirichlet dans elle-même, il faut et il suffit que T soit linéaire. Il se basera sur le fait qu'un noyau de Dirichlet homogène d'ordre $2-n$ est à niveau elliptique.

1. Préliminaire. Un noyau elliptique sur R^n est, par définition, symétrique et à niveau elliptique. S'il existe un nombre α tel que $k(ax) = a^\alpha k(x)$ pour $a(>0)$, on dit que $k(x)$ est positivement homogène d'ordre α. Soit $x \to Tx$ un isomorphisme de R^n sur lui-même et tel que, pour un noyau $k(x)$ positivement homogène, $k(Tx)$ soit un noyau positivement homogène du même ordre. En ce moment, on dit que T est homogène.

Notre méthode se basera sur le théorème de Lévy-Khinchin [1]. D'après le théorème, pour que $k(x)$ soit un noyau de Dirichlet [2], it faut et il suffit que l'on puisse écrire

$$\hat{k}(y) = \frac{1}{a + \Sigma b_{ij} y_i y_j + \int (1 - e^{2\pi i y \cdot z}) d\sigma(z)}, \tag{1}$$

où le second membre est localement sommable. Les signes $\wedge$ et $\cdot$ représentent respectivement la transformation de Fourier sur R^n et le produit intérieur, a est une constante non-négative, (b_{ij}) une matrice définie-positive, et σ est une mesure de Radon positive dans $R^n - \{0\}$ et telle que

$$\int \frac{|z|^2}{1+|z|^2} d\sigma(z) < +\infty.$$

La décomposition (1) est uniquement déterminée.

2. Noyaux elliptiques. On va, d'abord, préparer le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit k un noyau positivement homogène d'ordre $\alpha - n$, $\hat{k}$, la transformation de Fourier de k, est alors un noyau positivement homogène d'ordre $-\alpha$.*

En effet,

$$\hat{k}(ay) = \int e^{2\pi i x \cdot a y} k(x) dx = \frac{1}{a^\alpha} \hat{k}(y) \qquad \text{pour } a(>0).$$

On peut affirmer que si k est un noyau elliptique homogène d'ordre

$\alpha-n, \hat{k}$ est un noyau elliptique homogène d'ordre $-\alpha$ dans R^n. Enonçons précisément ci-dessus.

Lemme 2. *Soit*

$$k(x)=\frac{1}{(x^tAx)^{(n-2)/2}} \qquad \text{pour } x\in R^n-\{0\},$$

où A est une matrice définie-positive et non-singulière, alors,

$$\hat{k}(y)=\frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((n-\alpha)/2)}\frac{\pi^{(n/2)-\alpha}}{\sqrt{|A|}}\frac{1}{(y^tA^{-1}y)^{\alpha/2}} \qquad \text{pour } y\in R^n-\{0\}.$$

En effet, on peut écrire

$$k(x)=\frac{1}{2^{n-\alpha-z}\Gamma((n-\alpha)/2)}\int_0^\infty e^{-x^tAx/2\delta^2}\delta^{-n+\alpha-1}d\delta.$$

En posant

$$h(x)=e^{-x^tAx/2\delta^2},$$

on a

$$\hat{h}(y)=\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{|A|}}\,\delta^n e^{-2\pi^2\delta^2 y^tA^{-1}y}.$$

Par conséquent,

$$\hat{k}(y)=\frac{2^{(\alpha+2)/2}}{\Gamma((n-\alpha)/2)}\sqrt{\frac{\pi^n}{|A|}}\int e^{-2\pi^2\delta^2 y^tA^{-1}y}\delta^{\alpha-1}d\delta$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((n-\alpha)/2)}\frac{\pi^{(n/2)-\alpha}}{\sqrt{|A|}}\frac{1}{(y^tA^{-1}y)^{\alpha/2}}.$$

On montra ensuite qu'un noyau de Dirichlet homogène d'ordre $2-n$ est toujours elliptique.

Théorème. *Pour qu'un noyau k positivement homogène d'ordre $2-n$ soit un noyau de Dirichlet, il faut et il suffit que k soit elliptique.*

Le théorème résulte du lemme suivant:

Lemme 3. *Soit σ une mesure sur $R^n-\{0\}$ telle que*

$$\int\frac{|z|^2}{1+|z|^2}d\sigma(z)<\infty,$$

alors

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{|y|^2}\int(1-e^{2\pi iy\cdot z})d\sigma(z)=0.$$

En effet, pour $\varepsilon>0$ arbitraire, il existe un nombre $\delta>0$ tel que

$$\frac{1}{|y|^2}\left|\int_{|z|<\delta}(1-e^{2\pi iy\cdot z})d\sigma(z)\right|<4\pi^2\int_{|z|<\delta}|z|^2\,d\sigma(z)<\varepsilon.$$

On a, d'autre part,

$$\lim_{y\to\infty}\left|\frac{1}{|y|^2}\int_{|z|\geqq\delta}(1-e^{2\pi iy\cdot z})d\sigma(z)\right|\leqq\lim_{y\to\infty}\frac{2}{|y|^2}\int_{|z|\geqq\delta}d\sigma(z)=0.$$

On obtient ainsi le résultat différent de celui dans [3] par la manière analogique.

Démonstration du théorème 1.—D'après le lemme 1, $\hat{k}(y)$ est un noyau positivement homogène d'ordre -2, et, en vertu du lemme cidessus, $a=0$ et $\sigma=0$ dans la décomposition de Lévy-Khinchin (1). Par conséquent, $\hat{k}(y)$ est elliptique, et donc $k(x)$ est un noyau elliptique d'après le lemme 2.

Corollaire. *Pour $0<\alpha\leqq 2$, un noyau k elliptique et homogène d'ordre $\alpha-n$ est un noyau de Dirichlet.*

En effet, on peut écrire

$$\hat{k}(y)=\frac{1}{(y^t A^{-1} y)^{\alpha/2}},$$

qui est une fractionaire de la transformation de Fourier du noyau elliptique et homogène d'ordre $2-n$.

Mais, un noyau de Dirichlet homogène d'ordre $\alpha-n(0<\alpha<2)$ n'est pas toujours elliptique. Il existe un exemple suivant:

Exemple. Soit

$$\hat{k}(y)=\frac{1}{C_1|y_1|^\alpha+C_2|y_2|^\alpha+\cdots+C_n|y_n|^\alpha},$$

où $0<\alpha<2$, et $C_1, C_2, \cdots, C_n>0$.

Alors k est un noyau de Dirichlet non-elliptique et positivement homogène d'ordre $\alpha-n$.

En effet, il est clair que k est un noyau positivement homogène d'ordre $\alpha-n$ en vertu du lemme 1. On peut écrire

$$\sum_{i=1}^n C_i|y_i|^\alpha=\int(1-e^{2\pi i y\cdot z})d\sigma(z),$$

où σ est une mesure positive dans $R^n-\{0\}$, portée par les axes coordonnées et homogène d'ordre $-\alpha-n$; c'est-à-dire, $\sigma(az)=a^{-\alpha-n}\sigma(z)$ pour tout nombre positif a. D'après le lemme 2, k n'est plus elliptique.

3. Transformation homogène linéaire du noyau de Dirichlet. Soit $x\rightarrow Tx$ un isomorphisme homogène de R^n sur lui-même. On va rechercher la condition nécessaire et suffisante pour que l'isomorphisme applique un noyau de Dirichlet arbitraire à un noyau de Dirichlet. On commence avec la recherche de la transformation du noyau de Dirichlet par un isomorphisme homogène et linéaire T. On peut écrire

$$T:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12}\cdots t_{1n}\\ t_{21} & t_{22}\cdots t_{2n}\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\ t_{n1} & t_{n2}\quad t_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

où (t_{ij}) est une matrice non-singulière; c'est-à-dire, T est une transformation affine, homogène et non-singulière.

Théorème 2. *Soit k un noyau de Dirichlet. Si T est une transformation ci-dessus, alors $k'(x)=k(Tx)$ l'est aussi.*

Démonstration. D'après le théorème de Lévy-Khinchin,

$$\frac{1}{\hat{k}(y)}=a+y^t By+\int(1-e^{2\pi i y\cdot z})d\sigma(z),$$

où a, B et σ sont respectivement une constante non-négative, une matrice définie-positive, et une mesure positive et singulière.

Tandis que,

$$\int k'(x)e^{2\pi i x\cdot y}dx=\frac{1}{\|T\|}\int k(x')e^{2\pi i x'\cdot T^{-1}y}dx',$$

où $x'=Tx$ et $\|T\|$ est la valeur absolue du déterminant de T.

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{k}'(y)}&=\|T\|\left[a+(T^{-1}y)^tB(T^{-1}y)+\int(1-e^{2\pi i(T^{-1}y)\cdot z})d\sigma(z)\right]\\&=\|T\|\left[a+y^tB'y+\int(1-e^{2\pi i y\cdot z'})d\sigma(Tz')\right],\end{aligned}$$

où $B'=(T^{-1})^tBT^{-1}$ et $z'=T^{-1}z$. $k(Tx)$ est un noyau de Dirichlet, car $\sigma\circ T$ est une mesure positive et singulière.

D'après le théorème ci-dessus, pour qu'un isomorphisme homogène T applique la classe des noyaux de Dirichlet dans elle-même, il suffit que T soit linéaire. On va, ensuite, prouver que la condition est nécessaire.

Théorème 3. *Soit T une isomorphisme homogène, alors, trois énoncés suivants sont équivalents.*

a) *Pour un noyau de Dirichlet $k(x)$, $k(Tx)$ l'est aussi.*

b) *Pour un noyau de Dirichlet $k(x)$ d'ordre $2-n$, $k(Tx)$ l'est aussi.*

c) *T est linéaire.*

Démonstration. a) implique évidemment b), et c)$\Rightarrow$a) a lieu d'après le théorème 2. Donc, en vertu du théorème 1, il suffit de montrer que si T applique un ellipse dans R^n à un ellipse, T est linéaire. L'isomorphisme T s'écrit $Tx=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$, où le system $(f_i(x))$ est linéairement indépendent. Il est un résultat immédiat de la condition ci-dessus que $f_i(x)f_j(x)$ $(1\leqq i, j\leqq n)$ est un polynôme homogène d'ordre 2 de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Donc, pour i $(1\leqq i\leqq n)$, $f_i(x)$ est une fonction linéaire et homogène; c'est-à-dire, T est linéaire.

Références

[1] P. Courrège: Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur R^n, et formule de Lévy-Khinchin. Bull. Sc. math., 2e série, **88**, 3–30 (1964).

[2] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., **45**, 208–215 (1959).

[3] M. Itô: Sur les noyaux de Frostman-Kunugi et les noyau de Dirichlet. Ann. Inst. Fourier (à paraître).