67. *Une remarque sur la régularité des solutions des problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré**)

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., March 12, 1971)

§1. Introduction. Comme mon travail précédent [4], le présent article a été motivé par la collaboration de MM. Baouendi et Goulaouic [1], où ils ont démontré l'hypoellipticité de certains opérateurs du second ordre, elliptiques et dégénérés à la frontière. M. Zuilly a généralisé leur résultat à des opérateurs aussi du second ordre mais de dégénéressance d'ordre supérieur [6]. Les opérateurs traités dans [1] et [6] étaient tous auto-adjoints positifs. Je vais maintenant considérer des opérateurs pas nécessairement auto-adjoints, sous certaines conditions aux limites générales. Et, je vais chercher de restrictions sur les parties principales des opérateurs pour qu'ils soient hypoelliptiques. Le Théorème énoncé dans le §2 ne recouvre pas les résultats de [1] et [6]. Mais, voici une autre méthode que la régularisation elliptique.

§2. Problèmes aux limites généraux. Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$ à frontière S de classe C^∞, supposons que Ω soit situé localement à un seul côté de S. Considérons dans Ω un opérateur différentiel L d'ordre m:

$$L(x\,;D_x)u(x)=\sum_{h=0}^{k}P^h(x\,;D_x)(\varphi(x)^{k-h}u(x)),\tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$, positive dans Ω, nulle partout sur S telle que grad. $\varphi(x)$ ne s'annule jamais sur S. Pour fixer les idées, supposons qu'il existe un $\delta>0$ tel que

$$\varphi(x)=\text{dis.}\,(x,S),\ \text{ si dis.}\,(x,S)\leqq\delta.\tag{2}$$

Les $P^h(x\,;D_x)(0\leqq h\leqq k)$ sont des opérateurs différentiels d'ordre$\leqq(m-h)$ à coefficients de classe $C^\infty(\bar{\Omega})$, et en particulier, $P^0(x\,;D_x)$ est proprement elliptique d'ordre m uniformément sur $\bar{\Omega}$. Les m et k sont deux entiers satisfaisant à

$$0<k\leqq m=2b \text{ avec } b: \text{entier}\geqq 1.\tag{3}$$

L devient une application linéaire continue de $W_k^m(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, où $W_k^m(\Omega)$ est l'espace de Sobolev avec poids

$$W_k^m(\Omega)=\{u(x)\in H^{m-k}(\Omega)\,;\,\varphi(x)^k u(x)\in H^m(\Omega)\}.\tag{4}$$

Soit $\delta>0$ suffisamment petit. Pour un point x quelconque de $U=\{x\in\bar{\Omega}\,;$ dis. $(x,S)\leqq\delta\}$, posons $t=$dis. (x,S) et désignons par x' le seul point de

*) Ce travail a été partiellement supporté par une bourse du Sakkokaï.

S atteignant la distance minimale t de x. L'application $\chi: x \to (x', t)$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de U sur $S \times [0, \delta]$. Fixons une fonction $\alpha(t) \in C^\infty[0, +\infty)$ une fois pour toutes de sorte que $\alpha(t)=1$ si $0 \leqq t \leqq \delta/3$ et que $\alpha(t)=0$ si $t \geqq 2\delta/3$. Alors, chaque élément u de $W_k^m(\Omega)$ admet les m traces

$$\begin{cases} \gamma_q u(x') = (-1)^{q-1} \displaystyle\int_0^\infty t^{-q-1} \alpha(t) u(\chi^{-1}(x', t)) dt, \text{ si } -k \leqq q \leqq -1 \text{ ; et,} \\ \gamma_q u(x') = D_t^q u(\chi^{-1}(x', t))|_{t \downarrow 0}, \text{ si } 0 \leqq q \leqq m-k-1, \text{ où } D_t = -i \dfrac{\partial}{\partial t}. \end{cases} \tag{5}$$

Notons $\vec{u}(x') = {}^T\{\gamma_{-k} u(x'), \cdots, \gamma_{m-k-1} u(x')\}$. Alors, $u(x) \to \vec{u}(x')$ est une application linéaire continue de $W_k^m(\Omega)$ sur $H^{m-1/2}(S) \times \cdots \times H^{1/2}(S)$. Dans U, l'opérateur L s'exprime

$$Lu(\chi^{-1}(x', t)) = \sum_{h=0}^{k} P^h(\chi^{-1}(x', t)\,; D_{x'}, D_t)(t^{k-h} u(\chi^{-1}(x', t))), \tag{6}$$

où $D_{x'} = -i\,\partial/\partial x'$ désigne les dérivées sur S. Alors, pour chaque $0 \leqq h \leqq k$, soit $\Pi^h(x'\,; D_{x'}, D_t)$ la somme des termes exactement d'ordre $(m-h)$ de $P^h(\chi^{-1}(x', 0)\,; D_{x'}, D_t)$, et posons

$$\Lambda(x', t\,; D_{x'}, D_t) v(x', t) = \sum_{h=0}^{k} \Pi^h(x'\,; D_{x'}, D_t)(t^{k-h} v(x', t)). \tag{7}$$

Etant fixe un point quelconque $x' \in S$, définissons un polynôme en ρ:

$$\Phi_{x'}(\rho) = \sum_{h=0}^{k} p^{k-h}{}_{m+h-k}(x') i^h \rho(\rho-1) \cdots (\rho-h+1), \tag{8}$$

où $p^h{}_{m-h}(x')$ est le coefficient de $D_t{}^{m-h}$ dans $\Pi^h(x'\,; D_{x'}, D_t) (0 \leqq h \leqq k)$, signalons qu'il est indépendant du choix de coordonnées locales sur S.

Hypothèse 1. *Quel que soit $x' \in S$, $\Phi_{x'}(\rho)$ n'a aucun zéro sur la ligne*: Re. $\rho = k-m-(1/2)$. *Donc, le nombre μ des zéros $\rho_j(x')$ tels que* Re. $\rho_j(x') < k-m-(1/2)$ *est indépendant de x'. Supposons de plus que $\kappa = b + \mu - k$ soit non négatif.*

Lorsque $\kappa = 0$, le problème est de résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$L(x\,; D_x) u(x) = f(x) \tag{ENH}$$

dans $W_k^m(\Omega)$ pour $f(x)$ donnée de $L^2(\Omega)$. Pour que ce problème soit "bien posé," nous imposons encore une condition sur $\Lambda(x', t\,; D_{x'}, D_t)$ à chaque point $x' \in S$:

Condition 2 lorsque $\kappa = 0$. *Quels que soient $x' \in S$ et $\xi' \in T_{x'}$ (l'espace cotangent à S au point x') $(|\xi'|=1)$ fixes, l'équation différentielle*

$$\Lambda(x', t\,; \xi', D_t) v(t) = 0, \text{ dans } t > 0 \tag{eh}$$

n'admet que la seule solution $v(t)=0$ dans l'espace

$$W_k^m(\boldsymbol{R}_+) = \{v(t) \in H^{m-k}(\boldsymbol{R}_+)\,; t^k v(t) \in H^m(\boldsymbol{R}_+)\}. \tag{9}$$

Sous l'Hypothèse 1 et la Condition 2, nous avons une estimation a priori

$$\|u\|_{W_k^m(\Omega)} \leqq \text{Cte. } \{\|Lu\| + \|u\|\}, \text{ quel que soit } u \in W_k^m(\Omega), \tag{10}$$

où $\|u\|$ est la norme dans $L^2(\Omega)$. Si l'unicité des solutions de (ENH) a lieu, nous avons en particulier,

$$\|u\|_{W_k^m(\Omega)} \leqq \text{Cte. } \|Lu\|, \text{ pour tout } u \in W_k^m(\Omega). \tag{11}$$

Par contre dans le cas $\kappa>0$, (ENH) seule ne donne pas un problème bien posé, et nous devons y ajouter un système (B) de certains κ conditions aux limites:

$$B_j\vec{u}(x')\equiv\sum_{q=-k}^{m-k-1}B_{jq}(x'\,;D_{x'})\gamma_q u(x')=\varphi_j(x'),\ \text{pour}\ 1\leqq j\leqq\kappa, \tag{B}$$

où les $\varphi_j(x')$ sont données de $H^{m-k-m_j-1/2}(S)$. Chaque $B_{jq}(x'\,;D_{x'})$ est un opérateur différentiel d'ordre$\leqq(m_j-q)$ à coefficients de classe $C^\infty(S)$, où les $m_j(>,=\text{ou}<0)(1\leqq j\leqq\kappa)$ sont entiers$\leqq(m-k-1)$. Si $m_j-q<0$, alors B_{jq} correspondant est nul par définition. Ce système $(\mathrm{B})=\{B_j\}_{j=1}^{\kappa}$ ne peut être sans restriction, mais il doit satisfaire à une condition de Shapiro-Lopatinski que voici. Désignons par $B_{jq}^0(x'\,;D_{x'})$ la somme des termes exactement d'ordre (m_j-q) de B_{jq}, alors,

Condition de Shapiro-Lopatinski sur (B) lorsque $\kappa>0$. *Quels que soient $x'\in S$ et $\xi'\in T_{x'}(|\xi'|=1)$ fixes, l'équation (eh) sous les conditions aux limites:*

$$\sum_{q=-k}^{m-k-1}B_{jq}^0(x'\,;\xi')\gamma_q v=0,\quad 1\leqq j\leqq\kappa, \tag{b}$$

n'admet que la seule solution $v(t)=0$ dans $W_k^m(\boldsymbol{R}_+)$, où

$$\begin{cases}\gamma_q v=(-1)^{q-1}\displaystyle\int_0^\infty t^{-q-1}v(t)dt,\ si\ -k\leqq q\leqq-1\,;\ \text{et},\\ \gamma_q v=D_t^q v(t)|_{t\downarrow 0},\ si\ 0\leqq q\leqq m-k-1.\end{cases} \tag{12}$$

Sous l'Hypothèse 1 et la Condition de Shapiro-Lopatinski sur (B) lorsque $\kappa>0$, nous avons une estimation a priori (voir [5] et aussi [4])

$$\|u\|_{W_k^m(\Omega)}\leqq\text{Cte.}\,\{\|Lu\|+\|B\vec{u}\|_{\Xi^0}+\|u\|\},\ \text{quel que soit}\ u\in W_k^m(\Omega). \tag{13}$$

Si l'unicité des solutions de (ENH)-(B) a lieu, nous avons en particulier

$$\|u\|_{W_k^m(\Omega)}\leqq\text{Cte.}\,\{\|Lu\|+\|B\vec{u}\|_{\Xi^0}\},\ \text{pour tout}\ u\in W_k^m(\Omega), \tag{14}$$

où les espaces $\Xi^r(r=0,1,2,\cdots)$ sont définis par

$$\Xi^r=\prod_{j=1}^{\kappa}H^{m+r-k-m_j-(1/2)}(S). \tag{15}$$

§3. Théorème de régularité. Dans ce mémoire, nous nous bornons aux deux cas (α) et (β) suivants:

Cas (α): $0<k<m$ *et* (10) *ou* (13) *a lieu* (*suivant* $\kappa=0$ *ou* >0);

Cas (β): $0<k=m$ *et* (11) *ou* (14) *a lieu* (*suivant* $\kappa=0$ *ou* >0).

Evidemment, l'Hypothèse 1 et la Condition 2 ou de Shapiro-Lopatinski sont sous-entendues.

Théorème. *Supposons qu'un problème aux limites (ENH)-(B) (ou bien (ENH) seule si $\kappa=0$) tombe dans l'un des Cas (α) et (β). Supposons de plus qu'il n'y ait aucun zéro du $\Phi_{x'}(\rho)$ dans la zone: $k-m-M-(1/2)\leqq\mathrm{Re.}\,\rho\leqq k-m-(1/2)$ (M est un entier >0 donné). Alors, si $u(x)$ est une solution de classe $W_k^m(\Omega)$ de (ENH)-(B)* (resp. *(ENH)*) *pour un $f(x)\in H^r(\Omega)$ et un $\{\varphi_1(x'),\cdots,\varphi_\kappa(x')\}\in\Xi^r$, $u(x)$ appartient en effet à $W_k^{m+r}(\Omega)$ dès que $1\leqq r\leqq M$.*

Corollaire. *En outre de l'hypothèse du Théorème, supposons que*

$\mu=0$. *Alors, si* $f(x)\in C^\infty(\bar\Omega)$ *et* $\varphi_j(x')\in C^\infty(S)(1\leqq j\leqq\kappa)$, $u(x)$ *est en effet de classe* $C^\infty(\bar\Omega)$. *C'est-à-dire, l'opérateur L (ou plutôt le problèm aux limites (ENH)-(B) lorsque* $\kappa>0$) *est hypoelliptique.*

La restriction (α) ou (β) est posée pour que la méthode de "quotients différentiels" (dû à Nirenberg [3]) soit applicable. Cette méthode nous donne d'abord la régularité le long des directions tangentielles à S. Pour cette partie du raisonnement, nous n'avons pas besoin de l'hypothèse sur les zéros du $\Phi_{x'}(\rho)$. Ce qui est plus difficile est d'obtenir la régularité en direction normale à S. Pour la vérifier, une étude des opérateurs différentiels ordinaires développée dans le § suivant est fondamentale.

§4. Esquisse de la démonstration du théorème. Dans la demie-droite $\boldsymbol{R}_+=\{t>0\}$, considérons une équation différentielle

$$\Lambda_0(t\,;D_t)v(t)\equiv\sum_{h=0}^{k}a_hD_t{}^{m-h}(t^{k-h}v(t))=f(t),\tag{16}$$

où $D_t=-i\,d/dt$ et les $a_h(0\leqq h\leqq k)$ sont des constantes complexes. On peut supposer que $a_0=1$. Le polynôme

$$\Phi(\rho)=\sum_{h=0}^{k}a_{k-h}i^h\rho(\rho-1)\cdots(\rho-h+1)\tag{17}$$

joue le rôle de $\Phi_{x'}(\rho)$ défini par (8). Le Théorème dans le §3 est une conséquence de la Proposition suivante:

Proposition. *Pour un* $\Lambda_0(t\,;D_t)$ *défini par* (16), *supposons qu'il n'existe aucun zéro du* $\Phi(\rho)$ *dans la zone*: $k-m-M-(1/2)\leqq\operatorname{Re}\rho\leqq k-m-(1/2)$. *Alors, si un* $v(t)\in W_k^m(\boldsymbol{R}_+)$, *ayant le support compact dans* $\overline{\boldsymbol{R}_+}$, *est tel que* $\Lambda_0v(t)\in H^r(\boldsymbol{R}_+)$, $v(t)$ *appartient en effet à* $W_k^{m+r}(\boldsymbol{R}_+)$ *dès que* $1\leqq r\leqq M$.

La démonstration de cette Proposition s'effectue par récurrence sur $r(1\leqq r\leqq M)$. C'est-à-dire, supposons qu'on ait déjà vérifié que $v(t)\in W_k^{m+r-1}(\boldsymbol{R}_+)$ et posons $w(t)=(d/dt)^{m+r-k-1}v(t)$. Alors, l'hypothèse dans la Proposition est équivalente à supposer que

$$\begin{aligned}&w(t)\in W_k^k(\boldsymbol{R}_+),\ \operatorname{Supp}[w]\subseteq[0,T]\text{ pour un }T\text{ fini}\\&\qquad\text{et que }P\left(t\frac{d}{dt}\right)w(t)\in H^1(\boldsymbol{R}_+),\end{aligned}\tag{18}$$

où nous avons posé $P(z)=\Phi(k-m-r-z)$. Le but est de vérifier que $w(t)\in W_k^{k+1}(\boldsymbol{R}_+)$. Etant donné, en général, un polynôme $P(z)$ d'ordre k, nous disons qu'*il est muni de la propriété* $(P)_k$ si et seulement si toute fonction $w(t)$ satisfaisant à (18) appartient à $W_k^{k+1}(\boldsymbol{R}_+)$. De plus, désignons par Σ l'ensemble de tous les nombres complexes c tels que $P(z)=z-c$ soient munis de la propriété $(\mathrm{P})_1$.

Lemme. $\Sigma=\{c\in\boldsymbol{C}\,;\ \operatorname{Re}c>1/2$ *ou* $\operatorname{Re}c\leqq-1/2\}$. *Et, un polynôme* $P(z)$ *d'ordre* k *est muni de la propriété* $(P)_k$, *si et seulement si ses zéros appartiennent tous à* Σ.

Ce Lemme se repose sur l'inégalité No 330 de [2]. La Proposition ci-dessus est, à son tour, une conséquence immédiate du Lemme.

Références

[1] Baouendi, M. S., et Goulaouic, C.: Arkive Rat. Mech. Anal., **34**, 361–379 (1969).

[2] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., et Pólya, G.: Inequalities. Cambridge.

[3] Nirenberg, L.: Comm. Pure Appl. Math., **8**, 648–674 (1955).

[4] Shimakura, N.: J. Math. Kyoto Univ., **9**(2), 275–335 (1969).

[5] Vishik, M. I., et Grushin, V. V.: Mat. Sb., **80**(122), 455–491 (1969).

[6] Zuilly, C.: C. R. Acad. Sci. Paris, t. **268**, 532–534 (1969).