79. *Structure du groupe des similitudes orthogonales (Caractéristique $\neq 2$)*

Par Akiko YOSHIOKA
Université de la Préfecture d'Osaka

(Comm. by Kenjiro SHODA, M. J. A., June 2, 1972)

1. Le but de cette note est de montrer que les résultats correspondant à ceux obtenus dans le cas de caractéristique 2 [1] subsistent aussi dans le cas de caractéristique $\neq 2$.[1]

Dans tout ce qui suit, nous conserverons les notions et les notations dans le texte de J. Dieudonné [2]. Soient K un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, E un espace vectoriel à droite de dimension n sur K. Soient f une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, Q une forme quadratique non dégénérée, associée à f. Désignons par $O_n(K, Q)$ et $GO_n(K, Q)$ le groupe orthogonal et le groupe des similitudes orthogonales. Remarquons que la condition $Q(u(x)) = x\mu_u$, $\mu_u \in K^*$, $u \in GO_n(K, Q)$ équivaut à celle qu'on ait $f(u(x), u(y)) = f(x, y)\mu_u$, pour tout x, y de E, où μ_u est appelé le multiplicateur de u. En prenant les discriminants de ces deux membres, il vient $(det\, u)^2 = \mu_u^n$; si n est impair, μ_u est un élément carré dans K^*, et u peut être écrit $u = h_{\mu_u} u'$, où h_{μ_u} est l'homothétie associée à μ_u et où u' est un élément dans $O_n(K, Q)$; c'est-à-dire, $GO_n(K, Q)$ est produit direct de $O_n(K, Q)$ et du groupe des homothéties H, ce dernier est évidemment isomorphe à K^*. Au contraire, si n est pair, à moins que les multiplicateurs de tous les éléments de $GO_n(K, Q)$ ne soient carrés dans K^*, $GO_n(K, Q)$ n'est pas produit direct de $O_n(K, Q)$ et de H. Pour cette raison, nous limitons notre étude dans le cas où n est pair: $n = 2m$. Nous designons par H_x l'hyperplan orthogonal à un vecteur x dans E et par h_a l'homothétie associée à un élément a de K^*.

Notons d'abord que le lemme 1 dans [1] est valable si l' on remplace partout l'adjectif "singulier" par "isotrope", et que le lemme 3 dans [1] est aussi valable pour le groupe $GO_n(K, Q)$.

2. Dans tout ce numéro, supposons que l'indice ν de Q soit non nul. En choisissant convenablement des symétries orthogonales au lieu des transvections orthogonales, on peut démontrer les propositions 1 et 2 qui correspondent à celles exposées dans [1].

Proposition 1. *Pour tout u de $GO_{2m}(K, Q)$, il existe un vecteur*

1) On demande souvent si le procédé et les résultats dans [1] sont applicables au cas de caractéristique $\neq 2$. Voici la réponse.

isotrope x dans E et une v ou deux v_1, v_2 symétries orthogonales, tels que l'on ait $u_1(x)=x\mu_u$ ou $u_1=vu$ ou$=v_1v_2u$.

Cas I. Il existe un vecteur isotrope x dans E tel que $f(x, u(x))\neq 0$.

Prenons le vecteur non isotrope $a=u(x)-x\mu_u$ et la symétrie v par rapport à l'hyperplan H_a : $v(X)=X-a\dfrac{2f(X,a)}{Q(a)}$. Alors, il est évident que si l'on pose $u_1=vu$, on a $u_1(x)=x\mu_u$.

Cas II. Pour tout vecteur isotrope x de E, on a $f(x, u(x))=0$. D'après l'hypothèse $E^0=\{0\}$, il existe un vecteur z dans E tel que $f(x, z)\neq 0$ et $f(u(x),z)\neq 0$, et donc il existe un vecteur isotrope $y=x+z\alpha, \alpha\neq 0$, tel que $f(x, y)\neq 0$ et $f(u(x), y)\neq 0$. Pour les vecteurs non isotropes $a_1=x-y$ et $a_2=u(x)-y\mu_u$, on peut définir les symétries v_1 et v_2 par rapport aux hyperplans H_{a_1} et H_{a_2}, respectivement: $v_i(X)=X-a_i\dfrac{2f(X,a_i)}{Q(a_i)}$. Alors, on voit immédiatement que $v_1(y)=x$, $v_2(u(x))=y\mu_u$. Donc, en posant $u_1=v_1v_2u$ on a $u_1(x)=x\mu_u$.

Proposition 2. *Pour tout u de $GO_{2m}(K, Q)$, il existe des vecteurs isotropes x, y dans E et au plus de quatre symétries orthogonales v_i, $1\leqq i\leqq 4$, tels que l'on ait $f(x, y)\neq 0$, $u_2(x)=x\mu_u$, $u_2(y)=y$, où $u_2=\left(\prod_{i=1}^{s} v_i\right)u$, $s\leqq 4$.*

Pour un élément u de $GO_{2m}(K, Q)$, prenons un vecteur isotrope x et une similitude orthogonale u_1 considérés dans la proposition 1. Notons d'abord qu'il existe un vecteur isotrope y qui n'appartient pas à H_x et que pour un tel y, $y-u_1(y)$ appartient à H_x.

Cas I. Il existe un vecteur isotrope y n'appartenant pas à H_x tel qu'on ait $f(y, u_1(y))\neq 0$.

Si l'on prend la symétrie w par rapport à l'hyperplan H_a orthogonal au vecteur $a=y-u_1(y)$, on voit que w transforme $u_1(y)$ en y. De plus, la remarque $f(x, a)=0$ plus haute entraîne que w laisse invariant x. Dans ce cas, si l'on pose $u_2=wvu$ ou $=wv_1v_2u$, u_2 est une transformation cherchée.

Cas II. Pour tout vecteur isotrope y n'appartenant pas à H_x, on a $f(y, u_1(y))=0$.

(i) $m=1$. Si y et $u_1(y)$ sont linéairement indépendants, ces vecteurs engendrent le tout espace E. Donc, E serait totalement isotrope, contrairement à l'hypothèse $E^0=\{0\}$. Par conséquent on a $u_1(y)=y\alpha$, ceci entraîne que $f(x, y)\mu_u=f(u_1(x), u_1(y))=f(x\mu_u, y\alpha)=f(x, y)\mu_u\alpha$ et que $\alpha=1$, c'est-à-dire $u_2=u_1=vu$ ou $=v_1v_2u$.

(ii) $m>1$. Si y et $u_1(y)$ sont linéairement dépendants, on a $u_1(y)=y$ comme plus haut (i). Alors, soient y et $u_1(y)$ linéairement indépendants. Par les mêmes raisonnements que ceux du cas II, (iii) dans la démonstration de la proposition 2, [1], (et cf. [3], p. 43), on peut montrer les faits suivants: $H_y \neq H_{u_1(y)}$; $H_x \neq H_y$ et $H_x \neq H_{u_1(y)}$; $H_x \cap H_y \neq H_x \cap H_{u_1(y)}$; il existe un vecteur non isotrope z tel que $z \in H_x \cap H_y$ et $z \in H_x \cap H_{u_1(y)}$. Ainsi on peut choisir un vecteur non isotrope $t = x\alpha + z$, $\alpha \in K^*$ tel qu'on ait $f(t, u_1(y)) \neq 0$ ($|K| > 2$!), et en même temps que $f(t, y) \neq 0$ et $f(t, x) = 0$. Comme y est isotrope et que $f(t, y) \neq 0$, il existe un vecteur isotrope $\bar{t}$ tel qu'on ait $\bar{t} = y + t\beta$, $\beta \in K^*$ et $f(\bar{t}, y) \neq 0$. Alors, on a $f(\bar{t}, u_1(y)) = f(t, u_1(y))\beta \neq 0$. Prenons les vecteurs $a_1 = \bar{t} - y$, $a_2 = \bar{t} - u_1(y)$ et considérons les symétries w_1, w_2 par rapport aux hyperplans H_{a_1}, H_{a_2}, respectivement. Alors, on voit que $w_1(\bar{t}) = y$, $w_2(u_1(y)) = \bar{t}$. De plus, du fait que $f(x, a_1) = f(x, \bar{t} - y) = f(x, t)\beta = 0$, $f(x, a_2) = f(x, \bar{t} - u_1(y)) = f(x, y - u_1(y)) + f(x, t)\beta = 0$, on a $w_1(x) = x$, $w_2(x) = x$. Donc, on a $w_1 w_2 u_1(x) = x\mu_u$, $w_1 w_2 u_1(y) = y$; en autre terme, on a $u_2 = w_1 w_2 vu$ ou $= w_1 w_2 v_1 v_2 u$.

3. Théorème.[2] *Pour tout u de $GO_{2m}(K, Q)$, il existe une semi-involution w dans $GO_{2m}(K, Q)$ telle qu'on ait $w^2 = h\mu_u$ et $\mu_w = \mu_u$.*

Conformément à la démonstration faite dans le cas de caractéristique 2, nous distinguerons deux cas:

Cas I. $\nu = 0$. Raisonnons par récurrence sur m. Soient $m = 1$ et $\langle e, e' \rangle$ une base orthogonale de E. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à u par rapport à cette base. Alors, les coefficients de cette matrice satisfont aux relations $Q(e)\mu_u = Q(u(e)) = Q(e)a^2 + Q(e')c^2$ et $Q(e')\mu_u = Q(u(e')) = Q(e)b^2 + Q(e')d^2$. Si l'on pose $w = h_a$ pour $c = 0$ et $w = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{c}(\mu_u - a^2) \\ c & -a \end{pmatrix}$ pour $c \neq 0$, on voit facilement que $w^2 = h_{\mu_u}$, $w \in GO_2(K, Q)$ et $\mu_w = \mu_u$.

Fixons un vecteur e dans E, et posons $f(e, u(e)) = \lambda$. Naturellement, λ peut être égal à 0 ou non. Si l'on considère le vecteur $e' = -e\dfrac{\lambda}{Q(e)} + u(e)$, on a $f(e, e') = 0$. Remarquons que pour $u(e) = ek$, $k \in K^*$, on a $Q(e)\mu_u = Q(u(e)) = Q(e)k^2$ et qu'on peut prendre h_k comme w. Prenons le vecteur $a = e - u(e)\dfrac{2\lambda}{Q(e)\mu_u} + u^2(e)\dfrac{1}{\mu_u}$ et considérons la symétrie v par rapport à l'hyperplan H_a: $v(X) = X - a\dfrac{2f(X, a)}{Q(a)}$. Comme on a $f(u(e), a) = 0$, on a d'abord $v(u(e)) = u(e) = e\dfrac{\lambda}{Q(e)} + e'$. D'autre part, on a $Q(a) = 2\left\{Q(e) - \dfrac{2\lambda^2}{Q(e)\mu_u} + f(e, u^2(e))\dfrac{1}{\mu_u}\right\}$ et $2f(u^2(e), a) = Q(a)\mu_u$. D'où

2) Nous avons obtenu la forme normale de u modulo $O_{2m}(K, Q)$ dans le cas de caractéristique arbitraire ([3], p. 433, théorème).

on calcule suivant: $v(u(e'))=v\left(u\left(-e\frac{\lambda}{Q(e)}+u(e)\right)\right)=-v(u(e))\frac{\lambda}{Q(e)}$ $+v(u^2(e))=-u(e)\frac{\lambda}{Q(e)}+u^2(e)-a\frac{2f(u^2(e),a)}{Q(a)}=-u(e)\frac{\lambda}{Q(e)}+u^2(e)$ $-\left\{e-u(e)\frac{2\lambda}{Q(e)\mu_u}+u^2(e)\frac{1}{\mu_u}\right\}\mu_u=-e\mu_u+u(e)\frac{\lambda}{Q(e)}=-e\mu_u+\left(e\frac{\lambda}{Q(e)}+e'\right)$ $\frac{\lambda}{Q(e)}=e\left(\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}-\mu_u\right)+e'\frac{\lambda}{Q(e)}$.

Désignons par P le sous-espace engendré par e, e' et par $\bar{P}$ le sous-espace orthogonal à P. Soit $\langle e_2,\cdots,e_m,e'_2,\cdots,e'_m\rangle$ une base de $\bar{P}$ telle qu'on ait $f(e_i,e'_j)=\delta_{ij}$, $2\leqq i,j\leqq m$. La transformation vu laisse invariant le sous-espace non isotrope P, elle laisse aussi invariant $\bar{P}$. Designons par $\bar{u}$ et $\bar{Q}$ les restrictions à $\bar{P}$ de vu et de Q. Il est évident que $\mu_{\bar{u}}=\mu_{vu}=\mu_v\mu_u=\mu_u$. Alors, par l'hypothèse de récurrence il existe dans $GO_{2(m-1)}(K,Q)$ une semi-involution $\bar{w}$ de $\bar{P}$ telle qu'on ait $\bar{w}^2=h_{\mu_u}$ et $\mu_{\bar{w}}=\mu_u$. Soit $\bar{W}$ la matrice correspondant à $\bar{w}$ par rapport à la base $\langle e_2,\cdots,e_m,e'_2,\cdots,e'_m\rangle$ et soit $W=\begin{pmatrix}\lambda Q(e)^{-1} & \mu_u-\lambda^2Q(e)^{-2}\\ 1 & -\lambda Q(e)^{-1}\end{pmatrix}$. Prenons la transformation linéaire w de E dont la matrice est de la forme $\begin{pmatrix}W & 0\\ 0 & \bar{W}\end{pmatrix}$, par rapport à la base $\langle e,e',e_2,\cdots,e_m,e'_2,\cdots,e'_m\rangle$. Comme on a posé $e'=-e\frac{\lambda}{Q(e)}+u(e)$, on a $Q(e')=Q(e)\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}+Q(u(e))-2f(e,u(e))$ $\frac{\lambda}{Q(e)}=Q(e)\left(\mu_u-\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}\right)$. D'où on déduit que $Q(w(e))=Q(e)\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}$ $+Q(e')=Q(e)\mu_u$, $Q(w(e'))=Q(e)\left(\mu_u-\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}\right)^2+Q(e')\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}=Q(e')$ $\left(\mu_u-\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}\right)+Q(e')\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}=Q(e')\mu_u$, et que $f(w(e),w(e'))=f\left(e\frac{\lambda}{Q(e)}+e',\right.$ $\left.e\left(\mu_u-\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}\right)-e'\frac{\lambda}{Q(e)}\right)=Q(e)\frac{\lambda}{Q(e)}\left(\mu_u-\frac{\lambda^2}{Q(e)^2}\right)-Q(e')\frac{\lambda}{Q(e)}=\frac{\lambda}{Q(e)}$ $\cdot Q(e')-Q(e')\frac{\lambda}{Q(e)}=0$. On en conclut que $w\in GQ_{2m}(K,Q)$ et que μ_w $=\mu_u$. De plus, il est facile à voir que $W^2=\mu_uE$, c'est-à-dire que $w^2=h_{\mu_u}$.

Cas II. $\nu>0$. La récurrence sur m peut se poursuivre comme dans le cas de caractéristique 2, [1].

$m=1$: Il existe une base $\langle e,e'\rangle$ telle que $Q(e)=Q(e')=0$, $f(e,e')=1$. Si l'on prend une transformation w dont la matrice est de la forme $\begin{pmatrix}0 & \mu_u\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ par rapport à cette base, on voit immédiatement que w est une transformation cherchée.

Prenons deux vecteurs isotropes x, y et une transformation u_2 obtenus dans la proposition 2, et posons $e=x, e'=yf(x,y)^{-1}$. Soit P le sous-espace engendré par e, e', et soit $\bar{P}$ le sous-espace orthogonal à P. Comme u_2 laisse invariant P, u_2 laisse aussi $\bar{P}$ invariant. Si l'on désigne par $\bar{u}_2, \bar{Q}$ les restrictions à $\bar{P}$ de u_2, Q et par $\bar{\nu}$ l'indice de $\bar{Q}$, on a que $\bar{u}_2 \in GO_{2(m-1)}(K, \bar{Q})$ et $\mu_{\bar{u}_2}=\mu_u$. Pour cette $\bar{u}_2$ on peut trouver dans $GO_{2(m-1)}(K, \bar{Q})$ une semi-involution $\bar{w}$ de $\bar{P}$ telle que $\bar{w}^2=h_{\mu_u}$ et $\mu_{\bar{w}}=\mu_u$, d'après l'hypothèse de récurrence ou bien d'après le cas I, en suivant que $\bar{\nu}>0$ ou bien $\bar{\nu}=0$. Prenons une transformation linéaire w sur E telle que $w(e)=e', w(e')=e\mu_u$ et qu'elle est identique à $\bar{w}$ sur $\bar{P}$. Alors, on voit facilement que $w \in GO_{2m}(K, Q)$ et que $w^2=h_{\mu_u}$. De plus, comme on a $f(e, e')\mu_w=f(w(e), w(e'))=f(e', e\mu_u)=f(e', e)\mu_u$, on a $\mu_w=\mu_u$.

Remarque. Pour une semi-involution orthogonale w telle que $w^2=h_a$, les deux multiplicateurs $\mu_w=\pm a$ sont considérés. Pour qu'on ait $\mu_w=a$ il faut et il suffit qu'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $f(x_0, w(x_0))\neq 0$. En effet, s'il existe un tel x_0, on a $f(x_0, w(x_0))\mu_w =f(w(x_0), w^2(x_0))=f(w(x_0), x_0)a$ et donc $\mu_w=a$. Supposons ensuite qu'on ait $f(x, w(x))=0$ pour tout x dans E. Pour un vecteur $w(y)$, prenons un vecteur x tel que l'on ait $f(x, w(y))\neq 0$. De la relation $f(x+y, w(x+y))=0$, on déduit que $f(y, w(x))=-f(x, w(y))\neq 0$. Comme on a $0\neq f(x, w(y))\mu_w=f(w(x), w^2(y))=f(w(x), y)a=-f(x, w(y))a$, on a $\mu_w=-a$.

4. Pour une semi-involution w obtenue dans le théorème, on a $\mu_{uw^{-1}}=\mu_u\mu_w^{-1}=\mu_u\mu_u^{-1}=1$. Cela signifie que pour toute similitude orthogonale arbitraire u, il existe une transformation orthogonale u' telle qu'on ait $u=wu'$. En le combinant avec le théorème de Cartan-Dieudonné ([4], p. 20, proposition 8), on constate immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire 1. *Toute similitude orthogonale à $2m$ variables peut se représenter comme produit d'une semi-involution et de $2m$ symétries orthogonales au plus.*

Ensuite, nous avons une question proposée par le Professeur H. S. M. Coxeter: Combien d'involutions orthogonales sont-elles nécessaires pour représenter une transformation orthogonale comme leurs produit ? Lorsque le corps de base est de caractéristique $\neq 2$ et que l'indice de la forme quadratique est nul, M. J. Wonenwurger a donné la réponse, c'est-à-dire, toute transformation orthogonale peut être représenter comme produit de deux involutions orthogonales au plus ([5], p. 382, théorème). On en déduit le corollaire suivant:

Corollaire 2. *Pour une forme quadratique d'indice nul, toute similitude orthogonale peut être représentée comme produit de trois semi-involutions orthogonales (une semi-involution et deux involutions orthogonales).*

Références

[1] A. Yoshioka: Structure du groupe des similitudes orthogonales. Nagoya Math. J., **40**, 221–235 (1970).
[2] J. Dieudonné: La géométrie des groupes classiques. Springer, Berlin (1955).
[3] H. Hijikata and A. Yoshioka: A remark on the group of orthogonal similitudes. J. Math. Kyoto Univ., **10**, 433–437 (1970).
[4] J. Dieudonné: Sur les groupes classiques. Hermann, Paris (1948).
[5] M. J. Wonenburger: A decomposition of orthogonal transformations. Canad. Math. Bull., **7**, 379–383 (1964).