143. *Représentations unitaires du groupe modulaire. II*

Par Masahiko SAITO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., Nov. 13, 1972)

On généralise et améliore les résultats dans la note précédente [1].

1. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des formes quadratiques binaires $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des entiers relativement premiers et le discriminant $d=b^2-4ac$ est zéro ou positif non carré. Soit G le groupe $GL(2, \boldsymbol{Z})$. Pour $g \in G$ et $X \in \mathcal{F}$, posons $X^g=(\det g)^{-1}\,{}^tgXg$.

Choisissons une forme F dans $\mathcal{F}$ et appelons $H(F)$ le sous-groupe de G formé des éléments h tels que $F^h=F$. On a

$$H(F)=\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{t-bs}{2} & -cs \\ as & \dfrac{t+bs}{2} \end{pmatrix};\ t,\ s \in \boldsymbol{Z},\ t^2-ds^2=\pm 4\right\}$$

et $H(F)$ est isomorphe à $\boldsymbol{Z}\times\{\pm 1\}$.

On dira que F est de la 1^{re} espèce s'il existe un $k \in G$ tel que $F^k=-F$ et est de la 2^{e} espèce sinon. Les deux espèce sont des ensembles infinis.

2. Choisissons un caractère χ de $H(F)$ et désignons $U(F, \chi)$ la représentation unitaire de G induite de χ. Posons $\chi^*(h)=\chi((\det h)h^{-1})$ pour $h \in H(F)$.

Théorème 1. a) *Si F est de la 1^{re} espèce et si $\chi \neq \chi^*$, $U(F, \chi)$ est irréductible.*

b) *Si F est de la 1^{re} espèce et si $\chi=\chi^*$, $U(F, \chi)$ se décompose en somme directe de deux représentations irréductibles $U^{\pm}(F, x)$.*

c) *Si F est de la 2^{e} espèce, $U(F, \chi)$ est irréductible.*

Prenons une section Θ sur $H(F)\backslash G$ dans G: tout élément $g \in G$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $g=\rho(g)\cdot\theta(g)$, où $\rho(g) \in H(F)$ et $\theta(g) \in \Theta$.

Soit $\mathcal{X}(F)=\{F^g\,;\, g \in G\}$. Alors la représentation $U(F, \chi)$ se réalise dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}(F)=l^2(\mathcal{X}(F))$: pour $g \in G$, $\varphi \in \mathcal{H}(F)$ et $X \in \mathcal{X}(F)$,

$$U(F, \chi\,;\, g)\varphi(x)=\chi(X, g)\varphi(X^g)\,;$$

où $\chi(X, g)=\chi(\rho(\theta g))$, $X=F^\theta$, $\theta \in \Theta$.

3. **Théorème 2.** a) *Pour F de la 1^{re} espèce, $U(F, \chi)$ et $U(F, \chi')$ sont équivalentes si et seulement si $\chi'=\chi$ ou $\chi'=\chi^*$.*

b) *Pour F de la 2^{e} espèce, $U(F, \chi)$ et $U(F, \chi')$ sont équivalentes si et seulement si $\chi'=\chi$.*

c) $U^{\pm}(F, \chi)$ (*F étant de la* 1^{re} *espèce et* $\chi = \chi^*$) *n'est équivalente à aucune* $U(F, \chi')$. *Les* $U^{\pm}(F, \chi)$ *sont inéquivalentes l'une à l'autre.*

4. Soient F et F' dans $\mathcal{F}$. S'il existe un $g_0 \in G$ tel que $F' = \pm F^{g_0}$, on a $g_0^{-1} H(F) g_0 = H(F')$. Pour un caractère χ de $H(F)$, définissons un caractère χ^{g_0} de $H(F')$ par la formule $\chi^{g_0}(h') = \chi(g_0 h' g_0^{-1})$ pour $h' \in H(F')$.

Théorème 3. *Soient* F *et* F' *deux formes dans* $\mathcal{F}$. *Pour que* $U(F, \chi)$ *et* $U(F', \chi')$ *sont équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe un* $g_0 \in G$ *tel que* $F' = \pm F^{g_0}$ *et que* a) $\chi' = \chi^{g_0}$ *ou* $\chi' = \chi^{*g_0}$ *pour* F, F' *de la* 1^{re} *espèce et* b) $\chi' = \chi^{g_0}$ *pour* F, F' *de la* 2^{e} *espèce.*

Note. Les sous-groupes $H(F)$ sont les sous-groupes de Cartan de G au sens de Chevalley. On a donc établi une correspondance biunivoque entre 1) les classes de formes dans $\mathcal{F}$, 2) les classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G et 3) nos séries continues de représentations unitaires irréductibles.

5. Pour un sous-ensemble fini $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}(F)$ et pour φ, ψ dans $\mathcal{H}(F)$, posons $\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{Y}} = \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \varphi(Y) \psi(Y)$.

Théorème 4. *Pour tout* $g \neq \pm 1$ *dans* G, *il existe un seul nombre* $T(F, \chi; g)$ *jouissant de la propriété suivante: pour toute base hilbertienne* $\{\varphi_n; n = 1, 2, \cdots\}$ *de* $\mathcal{H}(F)$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un sous-ensemble fini* $\mathcal{Y}_0$ *dans* $\mathcal{X}(F)$ *tel qu'on ait l'inégalité*

$$\left| T(F, \chi; g) - \sum_{n=1}^{\infty} \langle U(F, \chi; g) \varphi_n, \varphi_n \rangle_{\mathcal{Y}} \right| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $\mathcal{Y}$ *fini contenant* $\mathcal{Y}_0$.

La somme dans l'inégalité converge absolument. On pourrait appeler $T(F, \chi; g)$ la *trace principale* de l'opérateur $U(F, \chi; g)$.

Les traces principales possèdent les propriétés suivantes:

a) Si g_1 et g_2 sont conjugués dans G, on a $T(F, \chi; g_1) = T(F, \chi; g_2)$.

b) Si $U(F, \chi)$ et $U(F', \chi')$ sont équivalentes, on a $T(F, \chi; g) = T(F', \chi'; g)$ pour tout $g \neq \pm 1$ dans G.

Théorème 5. *Si* g *n'est conjugué à aucun élément de* $H(F)$, $T(F, \chi; g) = 0$ *pour tout* χ. *Si* $g \neq \pm 1$ *est conjugué à un élément* h *dans* $H(F)$, *on a* $T(F, \chi; g) = \chi(h) + \chi^*(h)$ *pour* F *de la* 1^{re} *espèce, et* $T(F, \chi; g) = \chi(h)$ *pour* F *de la* 2^{e} *espèce.*

Ce résultat sert à demontrer le théorème 4.

Des pareils résultats sont obtenus pour le groupe $SL(2, \boldsymbol{Z})$.

Référence

[1] M. Saito: Représentations unitaires du groupe modulaire. Proc. Japan Acad., **48**, 381–383 (1972).