65. *Compacité des résolvantes des opérateurs maximaux cycliquement monotones*

Par Yoshio KONISHI
Département de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., May 22, 1973)

Soit A un opérateur «maximal cycliquement monotone»[1] dans un espace de Hilbert H sur R, tel que $0\in A0$. En utilisant le «*théorème de Kōmura*», i.e., le *théorème de Hille-Yosida non linéaire,*[2] on peut définir l'opérateur $A_{1/2}$ de A [3]; voir Barbu [2], [3] et Brézis [6]. $A_{1/2}$ est un opérateur maximal cycliquement monotone tel que $0\in A_{1/2}0$ (voir le théorème 4, ii) de Barbu [3]).

L'objet de cette note est de prouver le

Théorème. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) $(I+A)^{-1}$ *est compact.*[4]

(ii) $(I+A_{1/2})^{-1}$ *est compact.*

Remarques. (a) Notre résultat pourrait être considéré comme une version non linéaire de la propriété 4.5 de Balakrishnan [1].

(b) Il serait intéressant d'établir le théorème ci-dessus pour A «maximal monotone» au sens de Minty et Browder, tel que $0\in A0$. (Noter qu'on a l'implication: (ii)$\Rightarrow$(i) pour cet A.)

Démonstration. (ii)$\Rightarrow$(i): On sait que $D(A)\subset D(A_{1/2})$ et l'on obtient

$$(I+A)^{-1}=(I+A_{1/2})^{-1}(I+A^{\circ}_{1/2})(I+A)^{-1}.^{5)}$$

D'autre part, on a, pour tout $x\in H$,

$$\|(I+A^{\circ}_{1/2})(I+A)^{-1}x\|\leqq\|x\|+\|A^{\circ}_{1/2}(I+A)^{-1}x\|$$

et l'on sait que

$$\|A^{\circ}_{1/2}x\|\leqq 2\|A^{\circ}x\|^{1/2}\|x\|^{1/2}\qquad \text{pour tout } x\in D(A)$$

(voir l'exemple 1 de Brézis [6]). D'où

$$\begin{aligned}\|(I+A^{\circ}_{1/2})(I+A)^{-1}x\|,&\qquad x\in H,\\ &\leqq\|x\|+2\|A^{\circ}(I+A)^{-1}x\|^{1/2}\|(I+A)^{-1}x\|^{1/2}\\ &\leqq\|x\|+2\|x-(I+A)^{-1}x\|^{1/2}\|x\|^{1/2}\leqq(1+2\sqrt{2})\|x\|.\end{aligned}$$

Par conséquent l'opérateur $(I+A)^{-1}$ est compact.

(i)$\Rightarrow$(ii): $1^{ère}$ *étape*. Nous montrons d'abord la «compacité du

---

1) Voir Rockafellar [8].

2) Voir, e.g., le chapitre IV, 1 de Brézis [4].

3) Dans le cas particulier où $A=\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$, on a $A_{1/2}=A^{1/2}\equiv\int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, dE_\lambda$.

4) Un opérateur $T: D(T)\subset H\to H$ est dit *compact* si, pour toute partie B bornée de $D(T)$, l'image $T\cdot B$ est relativement compacte.

5) Etant donné un opérateur maximal monotone $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\circ}x, x\in D(\mathcal{A})$, désigne l'élément de norme minimale du convexe fermé $\mathcal{A}x$.

semi-groupe»[6] $\{e^{-tA}\}_{t\geqq 0}$ engendré par $-A$ sur $\overline{D(A)}$[7]: Notons que A coïncide avec le sous-différentiel $\partial\varphi$ d'une fonction $\varphi: H\to[0, +\infty]$, convexe semi-continue inférieurement, unique, telle que $\varphi(0)=0$.[8]
Par conséquent $e^{-tA}\overline{D(A)}\subset D(A)$, $t>0$, et

$$\|A^{\circ}e^{-tA}x\|\leqq\frac{2}{t}\|x\|,\quad t>0,\quad x\in\overline{D(A)},$$

(voir (7) du théorème 1 de Brézis [5]), de sorte que

$$\|(I+A^{\circ})e^{-tA}x\|\leqq\left(\frac{2}{t}+1\right)\|x\|,\quad t>0,\quad x\in\overline{D(A)}.$$

On a ainsi prouvé la compacité de

$$e^{-tA}=(I+A)^{-1}(I+A^{\circ})e^{-tA},\qquad t>0.$$

2^e *étape*. On va montrer la compacité de $(I+A_{1/2})^{-1}$: On sait l'estimation

$$\left\|\frac{d^+}{dt}e^{-tA}x\right\|\leqq\sqrt{\frac{\varphi(x)}{t}},\quad t>0,\quad x\in D(\varphi)$$

(cf. (18) de Brézis [5]) et que

$$D(\varphi)=D(A_{1/2}^{\circ}),$$
$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\|A_{1/2}^{\circ}x\|^2,\qquad x\in D(\varphi)$$

(voir le théorème 4 de Brézis [6]; cf. le théorème 4 de Barbu [3]). D'où

$$\left\|\frac{d^+}{dt}e^{-tA}x\right\|\leqq\frac{1}{\sqrt{2t}}\|A_{1/2}^{\circ}x\|,\quad t>0,\quad x\in D(A_{1/2}).$$

Par suite, pour $t>0$ et $x\in H$,

$$\|e^{-tA}(I+A_{1/2})^{-1}x-(I+A_{1/2})^{-1}x\|\leqq\int_0^t\left\|\frac{d}{ds}e^{-sA}(I+A_{1/2})^{-1}x\right\|ds$$
$$\leqq\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2s}}\|A_{1/2}^{\circ}(I+A_{1/2})^{-1}x\|\,ds\leqq 2\sqrt{2t}\,\|x\|.$$

Par conséquent, l'opérateur $(I+A_{1/2})^{-1}$ est compact.

Corollaire. *Il y a équivalence entre les quatre propriétés suivantes*:

(i) $(I+A)^{-1}$ *est compact.*
(ii) $(I+A_{1/2})^{-1}$ *est compact.*
(iii) $\{e^{-tA}\}_{t\geqq 0}$ *est compact.*
(iv) $\{e^{-tA_{1/2}}\}_{t\geqq 0}$ *est compact.*

Références

[1] A. V. Balakrishnan: Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them. Pacific J. Math., **10**, 419–437 (1960).

6) Voir Konishi [7].
7) Voir, e.g., le théorème 3.1 de Brézis [4].
8) Voir le théorème B de Rockafellar [8].

[2] V. Barbu: Sur un problème aux limites pour une classe d'équations différentielles non linéaires abstraites du deuxième ordre en t. C. R. Acad. Sc. Paris, **274**, 459–462 (1972).
[3] ——: A class of boundary problems for second order abstract differential equations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, **19**, 295–319 (1972).
[4] H. Brézis: Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Cours de 3ème cycle multigraphié, Paris (1971).
[5] ——: Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires. Israel J. Math., **9**, 513–534 (1971).
[6] ——: Equations d'évolution du second ordre associées à des opérateurs monotones. Israel J. Math., **12**, 51–60 (1972).
[7] Y. Konishi: Sur la compacité des semi-groupes non linéaires dans les espaces de Hilbert. Proc. Japan Acad., **48**, 278–280 (1972).
[8] R. T. Rockafellar: On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. Pacific J. Math., **33**, 209–216 (1970).