119. *Ueber den Führer eines Relativ-Abelschen Zahlkörpers.*

von Masao SUGAWARA,
Mathematisches Institut, Kaiserl. Universität zu Tokio.

(Eing. d. 30, Sep., 1926. Vorgelegt von T. TAKAGI, M.I.A., d. 12, Okt., 1926.)

Herr H. Hasse hat aus der Hecke'schen Funktionalgleichung der L-Funktion den folgenden Satz hergeleitet:[1]

Ist K ein relativ-Abelscher Körper über k, der Klassenkörper zur Idealgruppe H vom Index n aus k ist, so ist die Relativdiskriminante $\mathfrak{d}$ von K nach k das Produkt $\prod_{\chi} \mathfrak{f}_{\chi}$ der Führer aller n Charaktere χ nach H.

Aus diesem Satz bestimme ich den Exponent der höchsten Potenz eines Primteilers $\mathfrak{l}$ von n in k, die in Führer von K aufgeht.

Wenn die vorgelegte Idealgruppe H vom Index n nicht zyklisch ist, so seien die Primzahlpotenzen $l_1^{v_1},\cdots, l_s^{v_s}$ mit dem Produkt n die Invarianten ihrer Faktorgruppe $G \mid H$; dann gibt es ein System von s Idealgruppen H_i der Indizes $l_i^{v_i}$ mit zyklischen Faktorgruppen $G \mid H_i$, deren Durchschnitt $H = [H_1, H_2, \cdots H_s]$ ist.

Es seien nun $K_1, \cdots, K_s$ die Klassenkörper zu $H_1, H_2, \cdots, H_s$ mit den Führern $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_s$, dann ist nach einem Satze von Prof. Takagi[2],

$$K = \{K_1, K_2, \cdots, K_s\}$$

und $\mathfrak{f}$ = dem kleinsten gemeinsamen Multiplum von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \cdots, \mathfrak{f}_s$. Daher können wir uns auf den relativ-zyklischen Körper vom Primzahlpotenzgrade l^h beschränken.

Ist K_h ein solcher Körper, wird mit K_v der in K_h enthaltene relativzyklische Oberkörper von k vom Relativgrade l^v und mit K_t der Trägheitskörper für $\mathfrak{l}$ bezeichnet, dann geht $\mathfrak{l}$ in die Relativ-diskriminante $\mathfrak{d}$ von K_h k genau zur Potenz mit dem Exponenten:

$$(l-1)\, l^t \sum_{m=1}^{h-t} (v_m+1)\, l^{h-t-m}$$

1) H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jhrber. deutsch. Math. Ver., 35 (1926), 38 (Satz 16).

2) T. Takagi, Ueber eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers, Journ. Coll. Sc. Tokyo, 41 (1920), 96.

wo $v_1, v_2, \cdots$ die gewöhnliche Bedeutung für $K_{t+1} | K_t$, $K_{t+2} | K_{t+1}, \cdots$ haben. Anderseits gibt es $\varphi(l^m)$ Charaktere, welche primitive l^m-te Einheitswurzeln sind. Die zugehörigen mit $\mathfrak{f}_\chi$ bezeichneten Führer der Charactere χ sind dann der Führer von $K_m | k$; mit dem Hauptcharakter machen sie die l^h Charaktere der Klassengruppe $G | H$ aus.

Geht daher $\mathfrak{l}$ zur x_m-ten Potenz in den Führer von $K_m | k$ auf, so haben wir die folgenden Beziehungen

$$\sum_{m=1}^{h} \varphi(l^m) x_m = \begin{cases} 0, & (h = 1, \cdots, t) \\ (l-1) l^t \sum_{m=1}^{h-t} (v_m + 1) l^{h-t-m}, & (h \geqq t+1) \end{cases}$$

d.h.

$$x_m = 0, \qquad (m = 1, \cdots, t)$$

$$(1) \qquad \sum_{m=t+1}^{h} \varphi(l^m) x_m = (l-1) l^t \sum_{m=1}^{h-t} (v_m + 1) l^{h-t-m} \qquad (h \geqq t+1)$$

Hieraus folgt

$$(2) \qquad \sum_{m=t+1}^{h} l^{m-t-1} x_m = \sum_{m=1}^{h-t} (v_m + 1) l^{h-t-m}, \qquad (h \geqq t+1)$$

dasselbe ist auch gültig für $K_{h-1} | k$:

$$(3) \qquad \sum_{m=t+1}^{h-1} l^{m-t-1} x_m = \sum_{m=1}^{h-t-1} (v_m + 1) l^{h-t-1-m} \qquad (h \geqq t+2)$$

Subtrahieren wir (3) von (2) und dividieren wir durch l^{h-t-1}, so erhalten wir[1]

$$(4) \qquad \begin{cases} x_{t+1} = v_1 + 1, \\ x_h = v_1 + 1 + \sum_{m=1}^{h-t-1} \frac{v_{m+1} - v_m}{l^m}, \end{cases} \qquad (h \geqq t+2)$$

Eine interessante Folgerung ziehen wir aus der Beziehung:

$$x_{t+m+1} - x_{t+m} = \frac{v_{m+1} - v_m}{l^m}.$$

Es gilt nämlich für relativ-zyklische Zahlkörper

$$v_{m+1} \equiv v_m, \text{ mod. } l^m.$$

Bisher war durch Herrn Speiser[2] nur bekannt, dass für einen beliebigen relativ-normalen Körper alle Zahlen v mod. l mit einander congruent sind.

---

1) Bisher war nur obere Schranke für x_h bekannt, vgl. Takagi, a. a. O., S. 95. Allerdings stellte sich heraus, dass die dort angegebene Schranke die genaue ist.

2) A. Speiser, Die Zerlegungsgruppe, Journ. f. r. u. a. Math., **149**, 182 (Satz 4).