147. *Ueber die Maximalordnung einiger Funktionen in der Idealtheorie.*

(Zweite Mitteilung)

Von Zyoiti SUETUNA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität, Tokyo.

(Eing. Nov. 10, 1926. Vorgel. von T. TAKAGI, M. I. A., Nov. 12, 1926)

Nach der in meiner früheren Arbeit[1] entwickelten *Ramanujan*schen Methode habe ich in der kürzlich erschienenen zweiten Mitteilung[2] die Maximalordnung weiterer ideal- und zahlentheoretischen Funktionen bestimmt.

Es sei $\varkappa$ fest > 0. $S_\varkappa(\mathfrak{a})$ bezeichne die Summe der $\varkappa$-ten Potenzen der Normen aller Idealfaktoren eines Ideals $\mathfrak{a}$ in einem algebraischen Körper $\mathfrak{K}$. Dann gilt der folgende

Satz I. 1) *Für* $0 < \varkappa < 1$ *ist die Maximalordnung von* $S_\varkappa(\mathfrak{a})$

$$= N(\mathfrak{a})^\varkappa e^{Li((\log N(\mathfrak{a}))^{1-\varkappa}) + R(\log N(\mathfrak{a}))},$$

wo

$$R(x) = O(x^{1-\varkappa} e^{-\varphi(x)}).$$

2) *Die Maximalordnung von* $S_1(\mathfrak{a})$

$$= b_1 N(\mathfrak{a}) \log\log N(\mathfrak{a}) (1 + O(e^{-\varphi(\log N(\mathfrak{a}))})),$$

wo

$$\log b_1 = \lim_{x \to \infty}\left(\sum_{N(\mathfrak{p}) \leqq x} \frac{1}{N(\mathfrak{p})} - \log\log x\right) + \sum_{\substack{m \geqq 2 \\ \mathfrak{p}}} \frac{1}{m N(\mathfrak{p})^m}.$$

Also ist $\log b_1 = C$ (*Eulersche Konstante*), *falls* $\mathfrak{K}$ *speziell der Körper der rationalen Zahlen ist.*

3) *Für* $\varkappa > 1$ *ist die Maximalordnung von* $S_\varkappa(\mathfrak{a})$

$$= \zeta_{\mathfrak{K}}(\varkappa) N(\mathfrak{a})^\varkappa (1 - \mathfrak{L}(\log N(\mathfrak{a}), \varkappa) + R(\log N(\mathfrak{a}))),$$

wo $R(x)$ *dieselbe Bedeutung wie im Falle* 1) *hat.*

Hierin ist $(x \geqq 2)$

---

1) „Ueber die Maximalordnung einiger Funktionen in der Idealtheorie", Journ. Fac. Sci. Tokyo, Section I, Vol. I, Part 3 (1925), 105–153. Vergl. auch meine Note unter demselben Titel in diesen Proc. 2 (1926), 43–45.

2) Journ. Fac. Sci. Tokyo, Section I, Vol. I, Part 6 (1926), 249–283.

$$\mathfrak{L}(x, \varkappa) = \int_x^\infty \frac{du}{u^\varkappa \log u} \qquad (\varkappa > 1);$$

folglich (N fest $\geqq 1$)

$$\mathfrak{L}(x, \varkappa) = \frac{1}{(\varkappa-1)x^{\varkappa-1}\log x}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(-1)^m m!}{(\varkappa-1)^m(\log x)^m} + O\left(\frac{1}{x^{\varkappa-1}(\log x)^{N+1}}\right).$$

Bekanntlich hat schon *Landau* gezeigt, dass die „Minimalordnung" der *Euler*schen Funktion, die ich mit $\Phi(n)$ bezeichne,

$$\sim e^{-C}\frac{n}{\log\log n} \qquad \text{für } n \to \infty,$$

was nun folgendermassen verschärft wird:

Satz II. *$\Phi(\mathfrak{a})$ sei die Eulersche Funktion in $\mathfrak{K}$:*

$$\Phi(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{a})\prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{a}}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right).$$

Dann ist die Minimalordnung von $\Phi(\mathfrak{a})$

$$= b_2\frac{N(\mathfrak{a})}{\log\log N(\mathfrak{a})}\left(1+O(e^{-\varphi(\log N(\mathfrak{a}))})\right), \quad b_2 = \frac{1}{b_1}.$$

Jetzt bezeichne $Q_\sigma(n)$ die Anzahl aller Darstellungen von n als Summe von 2σ Quadraten. Bekanntlich steht $Q_\sigma(n)$ (für $\sigma < 5$) in enger Beziehung zu $S_{\sigma-1}(n)$ (für den Körper der rationalen Zahlen).

Satz III. *Die Maximalordnung von $Q_2(n)$ ist*

$$= 6e^C n \log\log n(1+O(e^{-\varphi(\log n)})).$$

Für $\sigma > 2$ kann das *Hauptglied* von $Q_\sigma(n)$, nach *Hardy-Littlewood*[1] und *Hardy*[2], in die bequem behandelbare Produktform transformiert werden; daraus kann ich folgende Sätze beweisen:

Satz IV. *Man setze zur Abkürzung*

$$C(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{\pi^\sigma}{(\sigma-1)!}\cdot\dfrac{1}{\zeta(\sigma)}\cdot\dfrac{2^\sigma}{2^\sigma-1} = \dfrac{2\sigma}{(2^\sigma-1)\,|B_\sigma|} & \textit{für } \sigma \equiv 0 \pmod{2}, \\[2ex] \dfrac{\pi^\sigma}{(\sigma-1)!}\cdot\dfrac{1}{L(\sigma)} = \dfrac{2^{\sigma+1}}{|E_{\sigma-1}|} & \textit{für } \sigma \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

wo $L(s)$ die Dirichletsche L-Funktion mit dem Nicht-Hauptcharakter mod. 4 *bedeutet.*

1) *Für* $\sigma \equiv 0$ (mod. 2) *ist die Maximalordnung von $Q_\sigma(n)$*

$$= c_1 C(\sigma) n^{\sigma-1}(1-\mathfrak{L}(\log n, \sigma-1)+R(\log n)),$$

1) G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD, „Some problems of 'Partitio Numerorum'; I: A new solution of WARING's problem", Göttinger Nachrichten (1920), 33–54.

2) G. H. HARDY, „On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five", Transa. Amer. Math. Soc. **21** (1920), 255–284.

wo

$$c_1 = \begin{cases} \zeta(\sigma-1) & \textit{für } \sigma \equiv 0 \pmod{4}, \\ \zeta(\sigma-1)\left(1-\dfrac{1}{2^{2\sigma-2}}\right) & \textit{für } \sigma \equiv 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$R(x) = O(x^{2-\sigma}e^{-\varphi(x)}).$$

2) *Für* $\sigma \equiv 1 \pmod{2}$ *ist die Maximalordnung von* $Q_\sigma(n)$

$$= c_2 C(\sigma) n^{\sigma-1}\left(1-\frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\log n, \sigma-1)+R(\log n)\right),$$

wo

$$c_2 = \left(1+\frac{1}{2^{\sigma-1}}\right)\prod_{p\equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\, 4)} \frac{1}{1-p^{-(\sigma-1)}}$$

und $R(x)$ *dieselbe Bedeutung wie im Falle* 1) *hat.*

Satz V. 1) *Für* $\sigma \equiv 0 \pmod{2}$ *ist die Minimalordnung von* $Q_\sigma(n)$ (*für kleines positives* ε)

$$= c_3 C(\sigma) n^{\sigma-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right)\right),$$

wo

$$c_3 = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{2^{\sigma-1}-1}+\dfrac{1}{2^{2\sigma-2}-2^{\sigma-1}} & \textit{für } \sigma \equiv 0 \pmod{4}, \\ 1-\dfrac{1}{2^{\sigma-1}-1} & \textit{für } \sigma \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

2) *Für* $\sigma \equiv 1 \pmod{2}$ *ist die Minimalordnung von* $Q_\sigma(n)$

$$= c_4 C(\sigma) n^{\sigma-1}\left(1+\frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\log n, \sigma-1)+R(\log n)\right),$$

wo

$$c_4 = \left(1-\frac{1}{2^{\sigma-1}}\right)\prod_{p\equiv 3 \,(\mathrm{mod.}\, 4)} \left(1-\frac{1}{p^{\sigma-1}}\right)$$

und $R(x)$ *dieselbe Bedeutung wie im Satz* IV *hat.*

Die obigen Resultate (mit Ausnahme von Satz V, 1) können noch verschärft werden unter Annahme der Richtigkeit von der (verallgemeinerten) *Riemann*schen Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion. Zum Beispiel kann die Maximalordnung von $S_\varkappa(\mathfrak{a})$, für $\varkappa > \frac{1}{2}$, *asymptotisch* abgeschätzt werden unter der Annahme:

$$\zeta_{\mathfrak{K}}(s) \neq 0 \textit{ für } \Re(s) > \frac{1}{2}.$$