35. *Sur la Puissance d'un Point relativement à la Courbe Algébrique dans le Plan Non-euclidien.*

Par Teikichi NISHIUCHI.
Institut de Mathématiques, Université Impériale, Kyoto.

(Rec. March 1, 1927. Comm. by T. TAKAGI, M. I. A., March 12, 1927.)

Soient p, x, y, les coordonnées Weierstrassiennes d'un point quelconque dans le plan non-euclidien. Posons

$$p = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2}},$$
$$x = \frac{kx_1}{\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2}},$$
$$y = \frac{kx_2}{\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2}}.$$

Les trois nombres x_0, x_1, x_2 sont les coordonnées homogènes du point.

Considérons une courbe algébrique dans le plan représenté par l'équation rationnelle intégrale et homogène par rapport aux coordonnées homogènes de point

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Soit la courbe de degré n et de classe ν, et supposons qu'elle ne touche pas l'absolu.

Nous appellerons en général *foyer* de la courbe un point tel que deux des tangentes menées de ce point à la courbe touchent aussi l'absolu.

Par un point $P(a)$, pris dans le plan de la courbe, on mène les normales à la courbe. Cherchons le produit des sinus des mesures des longueurs des normales comprises entre le point P et les pieds des normales.

On voit que les racines du système d'équations

$$\text{(I)} \begin{cases} f(x_0, x_1, x_2) = 0, \\ F(x_0, x_1, x_2, a_0, a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ \qquad = \Sigma A_{ijk}\, x_0^i\, x_1^j\, x_2^k = 0 \end{cases}$$

contiennent les coordonnées des pieds, celles-ci des points doubles, et celles-ci des points de rebroussement de la courbe $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, où A_{ijk} est une fonction linéaire homogène par rapport à a_0, a_1, a_2.

On voit facilement que la courbe $F(x_0, x_1, x_2, a_0, a_1, a_2) = 0$ passe par les points doubles et les points de rebroussement. De plus, la courbe $F(x_0, x_1, x_2, a_0, a_1, a_2) = 0$ touche la courbe $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ à chacun des points de rebroussement. Donc le nombre des normales est égal à $n+\nu$. Soient $\frac{d_1}{k}, \frac{d_2}{k}, \cdots\cdots, \frac{d_{n+\nu}}{k}$ les mesures des longueurs des normales comprises entre le point P et les pieds de ces normales $N_1(x^{(1)}), N_2(x^{(2)})\cdots\cdots N_{n+\nu}(x^{(n+\nu)})$. Pour abréger l'écriture, nous désignerons le produit $\sin\frac{d_1}{k}\sin\frac{d_2}{k}\cdots\sin\frac{d_{n+\nu}}{k}$ par P_N. Alors on peut écrire

$$P_N^2 = \frac{(aa)(x^{(1)}x^{(1)})-(ax^{(1)})^2}{(aa)(x^{(1)}x^{(1)})}\,\frac{(aa)(x^{(2)}x^{(2)})-(ax^{(2)})^2}{(aa)(x^{(2)}x^{(2)})}\cdots\cdots \frac{(aa)(x^{(n+\nu)}x^{(n+\nu)})-(ax^{(n+\nu)})^2}{(aa)(x^{(n+\nu)}x^{(n+\nu)})},$$

où

$$(aa) \equiv a_0^2+a_1^2+a_2^2,$$

$$(ax^{(i)}) \equiv a_0x_0^{(i)}+a_1x_1^{(i)}+a_2x_2^{(i)},$$

et

$$(x^{(i)}x^{(i)}) \equiv x_0^{(i)}x_0^{(i)}+x_1^{(i)}x_1^{(i)}+x_2^{(i)}x_2^{(i)}.$$

Du système (I), nous tirons un système d'équations

$$\text{(II)}\begin{cases} f(x_0, x_1, x_2) = 0, \\ F(x_0, x_1, x_2, a_0, a_1, a_2) = 0, \\ \varphi(x_0, x_1, x_2, a_0, a_1, a_2) \equiv \{(aa)-\lambda\}(xx)-(ax)^2 = 0, \end{cases}$$

où

$$\lambda \equiv (aa)\sin^2\frac{d}{k}.$$

En éliminant x_0, x_1, x_2 du système d'équations précédentes, on arrive à l'équation

$$R(f, F, \varphi) \equiv \Phi(\lambda, a_0, a_1, a_2) = 0,$$

où R est le résultant des trois fonctions f, F, φ.

Le polynôme Φ est de degré $2n$ par rapport aux coefficients de la seconde, de degré n^2 par rapport à ceux de la troisième du système (II). D'où il résulte que le coefficient de λ^{n^2} dans l'éxpression Φ est de degré $2n$ par rapport à a_0, a_1, a_2 et celui du terme absolu est de degré $2n^2+2n$ par rapport à a_0, a_1, a_2. On a donc

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\cdots\lambda_{n^2} = \Psi(a_0, a_1, a_2),$$

où Ψ est une fonction rationnelle de a_0, a_1, a_2.

Soient $(\delta^{(1)}), (\delta^{(2)}), \cdots\cdots, (\delta^{(d)})$ les coordonnées des points doubles $D_1, D_2, \cdots\cdots, D_d$ et $(\rho^{(1)}), (\rho^{(2)}), \cdots\cdots, (\rho^{(r)})$ celles des points de rebroussement $R_1, R_2, \cdots\cdots, R_r$ sur la courbe $f(x_0, x_1, x_2) = 0$. On aura alors

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_{n^2} = [(aa)]^{n+\nu} \sin^2 \frac{d_1}{k} \sin^2 \frac{d_2}{k} \cdots\cdots \sin^2 \frac{d_{n+\nu}}{k}$$
$$\times \left\{ [(aa)]^d \sin^2 \frac{PD_1}{k} \sin^2 \frac{PD_2}{k} \cdots\cdots \sin^2 \frac{PD_d}{k} \right\}^2$$
$$\times \left\{ [(aa)]^r \sin^2 \frac{PR_1}{k} \sin^2 \frac{PR_2}{k} \cdots\cdots \sin^2 \frac{PR_r}{k} \right\}^3.$$

D'où

$$(aa)^{n+\nu} P_N^2 = \frac{\Psi(a_0, a_1, a_2)}{\prod_{p=1}^{d} \left\{ \frac{(aa)(\delta^{(p)}\delta^{(p)}) - (a\delta^{(p)})^2}{(\delta^{(p)}\delta^{(p)})} \right\}^2 \prod_{q=1}^{r} \left\{ \frac{(aa)(\rho^{(q)}\rho^{(q)}) - (a\rho^{(q)})^2}{(\rho^{(q)}\rho^{(q)})} \right\}^3}$$
$$\equiv \Omega(a_0, a_1, a_2),$$

où Ω est une fonction rationnelle de a_0, a_1, a_2.

Or la fonction Ω (a_0, a_1, a_2) est nulle ;

i) quand le point $P(a)$ est sur la courbe donnée,

ii) quand le point $P(a)$ est sur une tangente commune à la courbe et à l'absolu. De plus, la fonction Ω ne devient infini sur aucune courbe. Donc Ω est un polynôme de a_0, a_1, a_2.

Soient $(\xi^{(1)}), (\xi^{(2)}), \cdots, (\xi^{(\nu)})$ les coordonnées des foyers $F_1, F_2 \cdots, F_\nu$ tels que le droit qui passe par deux quelconques des foyers ne touche pas simultanément la courbe et l'absolu. Donc

(III) $\Omega(a_0, a_1, a_2)$

$$= \frac{1}{C^2} \{f(a_0, a_1, a_2)\}^l \left[\left\{ \frac{(aa)(\xi^{(1)}\xi^{(1)}) - (a\xi^{(1)})^2}{(\xi^{(1)}\xi^{(1)})} \right\} \cdots \left\{ \frac{(aa)(\xi^{(\nu)}\xi^{(\nu)}) - (a\xi^{(\nu)})^2}{(\xi^{(\nu)}\xi^{(\nu)})} \right\} \right]^m,$$

où C est une constante, et l, m sont des nombres positifs. Comme le degré de l'éxpression Ω par rapport à a_0, a_1, a_2 est $2(n^2-2d-3r)$, on trouve que

$$2(n^2-2d-3r) = ln + 2m\nu$$

Par l'éxpansion des deux membres de l'équation (III), on trouve que

$$l = 2.$$

D'où

$$m = 1.$$

On obtient donc pour le produit cherché la formule suivante :

$$P_N = \frac{1}{C}\frac{f(a_0, a_1, a_2)}{\{\sqrt{(aa)}\}^n}\sqrt{\frac{(aa)(\xi^{(1)}\xi^{(1)})-(a\xi^{(1)})^2}{(aa)(\xi^{(1)}\xi^{(1)})}}\cdots\sqrt{\frac{(aa)(\xi^{(\nu)}\xi^{(\nu)})-(a\xi^{(\nu)})^2}{(aa)(\xi^{(\nu)}\xi^{(\nu)})}}.$$

C'est-à-dire

$$P_N = \frac{1}{C}\frac{f(a_0, a_1, a_2)}{\{\sqrt{(aa)}\}^n}\sin\frac{PF_1}{k}\sin\frac{PF_2}{k}\cdots\sin\frac{PF_\nu}{k}.$$

Donc

$$\text{(IV)}\qquad \frac{f(a_0, a_1, a_2)}{\{\sqrt{(aa)}\}^n} = C\,\frac{\sin\dfrac{PN_1}{k}\sin\dfrac{PN_2}{k}\cdots\sin\dfrac{PN_{n+\nu}}{k}}{\sin\dfrac{PF_1}{k}\sin\dfrac{PF_2}{k}\cdots\sin\dfrac{PF_\nu}{k}}.$$

Nous appellerons l'éxpression

$$\frac{f(a_0, a_1, a_2)}{\{\sqrt{(aa)}\}^n}$$

la puissance du point $P(a)$ relativement à la courbe

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0$$

dans le plan non-euclidien.

On a donc le théorème suivant :

Dans le plan non-euclidien, la puissance d'un point relativement à la courbe algébrique qui ne touche pas l'absolu est proportionnelle au produit des sinus des mesures des longueurs des normales menées du point à la courbe divisé par le produit des sinus des mesures des distances du point aux foyers de cette courbe.

Pour déterminer la constante C, il faut substituer aux valeurs de a_0, a_1, a_2 dans la formule (IV) les coordonnées d'un point spécial dans le plan.