12. *Eine relativgeometrische Erweiterung der affinen Differentialgeometrie.*

Von Wilhelm SÜSS.
Seventh Kotogakko, Kagoshima.

(Rec. Feb. 1, 1928. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Feb. 12, 1928.)

In § 5 meiner ersten Arbeit zur relativen Differentialgeometrie (Jap. Journ. of Math. **4**, 1927) habe ich eine Erweiterung der Affingeometrie ebener Kurven im Sinne der im Anschluss an Ideen *H. Minkowskis* von *E. Müller* begründeten relativen Differentialgeometrie (R-D) angedeutet. Hier möchte ich einige der Ergebnisse mitteilen, die ich bei entsprechender Behandlung der Flächentheorie erhalten habe. Die so entstehende „*relative Affingeometrie*" (R-A-G) kann auch als *simultane Affingeometrie zweier verschiedener Flächen* gekennzeichnet werden, so wie Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche eine simultane Flächentheorie zweier Flächen im Sinne der Differentialgeometrie der Bewegungsgruppe ist. Sie geht in die gewöhnliche Affingeometrie (A-G) (vergl. *W. Blaschke*: Differentialgeometrie II: (*B* II)) über, wenn eine der beiden Flächen, die sogen. „Eichfläche," eine *Affinsphäre* ist. Die Ausnahmestellung, die hier die Affinsphären einnehmen (und nicht etwa die Flächen zweiter Ordnung, wie man zunächst vermuten könnte), ist bemerkenswert und bietet einen Weg zu deren Klassifizierung.

Bei allgemeiner Eichfläche $\mathfrak{e}$ nehmen die Sätze der R-A-G eine nunmehr das Verhältnis *zweier* Flächen (nämlich der gerade betrachteten Fläche $\mathfrak{x}$ und der Eichfläche $\mathfrak{e}$) kennzeichnende Form an. Zwischen beide Flächen schiebt sich als dritte, von den beiden ersten aber bestimmte Fläche das Krümmungsbild $\mathfrak{h}$ unserer R-A-G ein (so wie dasjenige der A-G zwischen der Fläche $\mathfrak{x}$ und der Einheitskugel steht). Die R-A-G ist dann gewöhnliche R-D von $\mathfrak{x}$ bezüglich dieses Krümmungsbildes $\mathfrak{h}$ als Eichfläche. Bei Umkehrung des Verhältnisses der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ tritt neben das „erste" ($\mathfrak{h}$) übrigens ein i.A. von ihm verschiedenes „zweites Krümmungsbild" $\mathfrak{h}^*$, dessen Verwendung gleichzeitig mit $\mathfrak{h}$ den Betrachtungen eine symmetrische Gestalt gibt und zur Vereinfachung der Beweise beiträgt. Die „A-G im Grossen" der Eiflächen besitzt in der R-A-G ein vollkommenes Gegenstück. Als Grundlage kann hier ein Satz betrachtet werden, der in der Sprache der A-G lautet: Wenn zwei Eiflächen in Punkten gleicher äusserer Normalen von einem festen Punkt für je zwei Punkte gleichgerichteter äusserer Normalen gleiche Affinentfernung haben und sich in einem Punkte berühren, so sind sie miteinander identisch. Die „R-A-G im Grossen" der Eiflächen bringt zugleich auch neue Beweise für die entsprechenden Sätze der A-G.

Es sei L die Affinentfernung der Eichfläche $\mathfrak{e}$ vom Ursprung O. ξ sei der in einander entsprechenden Punkten der Flächen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{x}$ übereinstimmende Einheitsvektor der Flächennormalen. Dann bilden wir mit Hilfe des kontravarianten Vektors X der A-G (B II) als sein Gegenstück in der R-A-G

$$\mathfrak{z} = \frac{X}{L} \tag{1}$$

und betrachten

$$\mathrm{G}_{ik} = \mathfrak{x}_{ik}\,\mathfrak{z} = -\,\mathfrak{x}_i\,\mathfrak{z}_k = -\,\mathfrak{x}_k\,\mathfrak{z}_i \tag{2}$$

als Koeffizienten der quadratischen Grundform der R-A-G, auf die wir alle weiteren kovarianten Differentiationen gründen.

$$\mathrm{A}_{ikl} = \mathfrak{x}_{ikl}\,\mathfrak{z} = -\,\mathfrak{x}_{ik}\,\mathfrak{z}_l = \mathfrak{x}_i\,\mathfrak{z}_{kl} = \mathrm{A}_{ilk} = \ldots\ldots \tag{3}$$

sind die Koeffizienten der kubischen Grundform der R-A-G. Der Vektor $\mathfrak{h}$, das R-A-Krümmungsbild der R-A-G, ist dann bestimmt durch

$$\mathfrak{h}\,\mathfrak{z} = 1, \quad \mathfrak{h}\,\mathfrak{z}_i = \mathfrak{h}_i\,\mathfrak{z} = 0, \qquad (i=1,2). \tag{4}$$

Es wird

$$2\mathfrak{h} = \mathrm{G}^{ik}\,\mathfrak{x}_{ik} - \mathrm{A}_i{}^{ik}\,\mathfrak{x}_k. \tag{5}$$

Als „*Ableitungsgleichungen*" erhält man

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_{ik} = \mathrm{A}_i{}^l{}_k\,\mathfrak{x}_l + \mathrm{G}_{ik}\,\mathfrak{h}, \\ \mathfrak{h}_i = \mathrm{B}_i{}^l\,\mathfrak{x}_l, \quad \mathrm{B}_{ik} = \mathfrak{z}_{ik}\,\mathfrak{h} = -\mathfrak{z}_i\,\mathfrak{h}_k = -\mathfrak{z}_k\,\mathfrak{h}_i = \mathfrak{z}\,\mathfrak{h}_{ik} = \mathrm{B}_{ki}, \\ \mathfrak{z}_{ik} = -\mathrm{A}_i{}^l{}_k\,\mathfrak{z}_l + \mathrm{B}_{ik}\,\mathfrak{z}. \end{cases} \tag{6}$$

Die „*Integrabilitätsbedingungen*" lauten

$$\begin{cases} \mathrm{A}_i{}^l{}_l = 2\,(\log L)_i = 2\varphi_i, \\ \mathrm{A}_{ilk,\,m} - \mathrm{A}_{imk,\,l} + (\mathrm{A}_{ilh}\,\mathrm{A}_{nmk} - \mathrm{A}_{imh}\,\mathrm{A}_{nlk})\,\mathrm{G}^{hn} + \mathrm{G}_{il}\,\mathrm{B}_{mk} - \mathrm{G}_{im}\,\mathrm{B}_{lk} \\ \qquad + \mathrm{R}_{ik,\,lm} = 0, \\ \mathrm{B}_{ik,\,m} - \mathrm{B}_{mk,\,i} + \mathrm{A}_{lmk}\mathrm{B}_i{}^l - \mathrm{A}_{lik}\mathrm{B}_m{}^l = 0, \end{cases} \tag{7}$$

deren erste an die Stelle der Apolarität der Formen (G_{ik}) und (A_{ikl}) in der A-G tritt und aus denen die Darstellungen folgen:

$$\begin{cases} I + H = S + L, \qquad \text{wenn} \\ I = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{ikl}\mathrm{A}^{ikl}, \; H = -\frac{\mathrm{B}_i{}^i}{2}, \; L = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_i{}^i{}_k\,\mathrm{A}_l{}^{kl} = 2\varphi_k\varphi^k, \\ S = -\frac{1}{2}\mathrm{R}_{ik,\,lm}\mathrm{G}^{im}\,\mathrm{G}^{kl} \end{cases} \tag{8}$$

ist, wobei S das *Riemann*sche Krümmungsmass der Form (2), $(I-L)$ das Gegenstück der *Pick*schen Invariante der A-G und $H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ die mittlere R-A-Krümmung ist. Dadurch, dass man die Grundformen der R-A-G durch diejenigen der A-G und umgekehrt diese durch jene und durch L darstellen kann, kommt man zu dem Satz: Bei Angabe der Grundformen (G_{ik}) und (A_{ikl}) und von L derart, dass die Integrierbarkeitsbedingungen (7) gelten, sind zwei Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ bestimmbar, die (G_{ik}) und (A_{ikl}) zu Grundformen einer R-A-G von $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{e}$ als Eichfläche und L als Affinentfernung von $\mathfrak{e}$ vom Ursprung haben. Die Bestimmung von $\mathfrak{x}$ ist dabei bis auf (auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ gleichzeitig auszuübende) inhaltstreue Affinitäten eindeutig, die von $\mathfrak{e}$ dagegen nicht.

Für die R-A-Krümmungslinien, d.h. diejenigen Kurven von $\mathfrak{x}$, längs welchen die R-A-Normalen $(\mathfrak{h})$ Torsen bilden, ist

$$\mathfrak{x}_i + R_i \mathfrak{h}_i = 0. \tag{9}$$

Die R-A-Sphären, deren sämtliche Kurven R-A-Krümmungslinien sind, sind durch $R_1=R_2=\text{const}$ bestimmt. Für sie existiert, wenn sie „eigentlich" sind, ein Punkt $\mathfrak{a}$, so dass die R-A-Entfernung $(\mathfrak{x}-\mathfrak{a})\mathfrak{z}$ konstant ist. Es gilt der Satz:

Jede relativgeometrische Eifläche ist durch Angabe eines ihrer Flächenelemente und der Richtung der äusseren Normalen in diesem eindeutig bestimmt.

Da nach den Ergebnissen der R-D Eiflächen mit konstanter mittlerer R-A-Krümmung H oder konstanter Summe oder konstantem Produkt der R-A-Krümmungsradien R_1, R_2 sich als R-A-Sphären erweisen, so sind hiermit die Hauptsätze der R-A-G im Grossen bereits erledigt.

Für die R-A-Oberfläche

$$O = \int (\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}_1\,\mathfrak{h}_2)\, R_1 R_2\, du^1 du^2 = \int L^2 \sqrt{G}\, du^1 du^2 \tag{10}$$

gelten gewisse Ungleichungen, die zu einem isoperimetrischen Problem der R-A-G führen. Die R-Minimalflächen (*E. Müller*) der R-A-G sind Erweiterungen der Affinminimalflächen *W. Blaschke*s. Einige Sätze über wechselseitig affinparallele Flächen und Affinrotationsflächen, die ich in den Math. Ann. veröffentlicht habe, lassen sich gleichfalls übertragen.

Endlich stehen einer Ausdehnung der Theorie auf Hyperflächen im n-dimensionalen Raum keine Schwierigkeiten im Wege.