135. Über das Verhalten der Folge der Integralsysteme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

By Mitio NAGUMO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Rec. Sept. 19, 1928. Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 2, 1928.)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung des Verhaltens der Folge der Integralsysteme von gewöhnlichen Differentialgleichungen in normaler Form

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k, \overset{n}{\varphi}_1(t), \ldots, \overset{n}{\varphi}_\lambda(t)\right\} \quad (i=1,2,\ldots,k),$$

wobei die Konvergenz der Folge der Integrale von Funktionensystemen $\{\overset{n}{\varphi}_1(t), \ldots, \overset{n}{\varphi}_\lambda(t)\}$ vorausgesetzt wird. Dabei ist die Stetigkeit der Funktionen nicht notwendig vorausgesetzt. Hier verstehen wir unter Integralsystemen dieser Differentialgleichungen mit den Anfangsbedingungen $x_i(t_0)=\xi'_i$ die Funktionensysteme $\{x_1(t), \ldots, x_k(t)\}$, die den Gleichungssystemen

$$x_i(t)=\xi'_i+\int_{t_0}^{t} f_i\left\{t, x_1(t), \ldots, x_k(t), \overset{n}{\varphi}_1(t), \ldots, \overset{n}{\varphi}_\lambda(t)\right\}dt \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

genügen, wobei die Integrale im Sinne von de la Vallée-Poussin verstanden werden. Dann erhalten wir die folgenden Sätze, deren Beweise in „Japanese Journal of Mathematics“ erscheinen werden. Der Kürze halber bezeichnen wir mit $\overline{B}$ den Bereich $a\leqq t\leqq b$, $|x_i-\xi_i|\leqq l$, $-\infty<\varphi_\mu<\infty$ und mit B den Bereich $a\leqq t\leqq b$, $|x_i-\xi_i|\leqq l$.

I. Die Funktionen $F_i\{t, x_1, \ldots, x_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}$ und ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_\mu}$ und $\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_\mu \partial \varphi_\nu}$ $(\mu, \nu=1, \ldots, \lambda)$ seien in $\overline{B}$ stetig. F_i genügen auch für $|\varphi_\mu|\leqq h$ in B der Lipschitzbedingung

$$\left|F_i\left\{t, x_1^*, \ldots, x_k^*, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\right\}-F_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\right\}\right|$$
$$\leqq K_h\sum_{j=1}^{k}\left|x_j^*-x_j\right|,$$

wobei K_h nur von h abhängige Konstante bedeutet. Es seien $\overset{n}{x}_i(t)$ und

$x_i(t)$ die in einem Teilbereich von B liegenden Integralsysteme der Differentialgleichungen

$$\frac{d\overset{n}{x}_i}{dt}=F_i\left\{t, \overset{n}{x}_1, \ldots, \overset{n}{x}_k, \overset{n}{\varphi}_1(t), \ldots, \overset{n}{\varphi}_\lambda(t)\right\}$$

bzw.

$$\frac{dx_i}{dt}=F_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_\lambda(t)\right\}$$

mit den Anfangsbedingungen $\overset{n}{x}_i(t_0)=\overset{n}{\xi}_i$ bzw. $x_i(t_0)=\xi_i$, wobei $\varphi_\mu(t)$ und $\overset{n}{\varphi}_\mu(t)$ in $<a, b>$ summierbare Funktionen sind. Dann erhält man:

Dafür, dass nur aus den Relationen

$$|\overset{n}{\varphi}_\mu(t)|\leqq h, \quad |\varphi_\mu(t)|\leqq h, \quad \lim_{n\to\infty}\overset{n}{\xi}_i=\xi_i'$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}\overset{n}{\varphi}_\mu(t)dt=\int_{t_0}^{t}\varphi_\mu(t)dt$$

stets die Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty}\overset{n}{x}_i(t)=x_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

folgen, wobei h eine beliebige feste Konstante und $(t_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_k)$ einen beliebigen inneren Punkt von B bedeutet, ist es notwendig und hinreichend, dass F_i in bezug auf $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda)$ linear sind.

II. Die Funktionen F_i und ihre partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial F_i}{\partial \varphi_\mu}$ seien in $\overline{B}$ stetig. F_i genügen auch der Bedingung

$$\left|F_i\left\{t, x_1^*, \ldots, x_k^*, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\right\}-F_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\right\}\right|$$
$$\leqq K\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\right)\sum_{j=1}^{k}\left|x_j^*-x_j\right|,$$

wobei K eine nicht negative stetige Funktion von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda)$ bedeutet. Es seien $\overset{n}{x}_i(t)$ und $x_i(t)$ die in B liegenden Integralsysteme der Differentialgleichungen

$$\frac{d\overset{n}{x}_i}{dt}=F_i\left\{t, \overset{n}{x}_1, \ldots, \overset{n}{x}_k, \overset{n}{\varphi}_1(t), \ldots, \overset{n}{\varphi}_\lambda(t)\right\}$$

bzw.

$$\frac{dx_i}{dt}=F_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_\lambda(t)\right\}$$

mit den Anfangsbedingungen $\overset{n}{x}_i(t_0)=\overset{n}{\xi}_i$ bzw. $x_i(t_0)=\xi_i$, wobei $\overset{n}{\varphi}_\mu(t)$ in

$\langle a, b \rangle$ summierbare und $\varphi_\mu(t)$ in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktionen sind. Weiter definieren wir

$$\mathscr{E}_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k; \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda; \varphi_1^*, \ldots, \varphi_\lambda^*\right\}$$

$$\equiv F_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k, \varphi_1^*, \ldots, \varphi_\lambda^*\right\} - F_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\right\}$$

$$-\sum_{\mu=1}^{\lambda}\left(\varphi_\mu^* - \varphi_\mu\right)\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_\mu}\left\{t, x_1, \ldots, x_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\right\}.$$

Unter den folgenden fünf Bedingungen

$$\left|\mathscr{E}_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k; \varphi_1(t); \ldots, \varphi_\lambda(t); \varphi_1^*, \ldots, \varphi_\lambda^*\right\}\right|$$

$$\leqq a\mathscr{E}_1\left\{t, x_1, \ldots, x_k; \varphi_1(t), \ldots, \varphi_\lambda(t); \varphi_1^*, \ldots, \varphi_\lambda^*\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, k)$$

in B für alle φ^*, wobei a eine positive Konstante ist,

$$\int_{t_0}^{t} |\overset{n}{\varphi}_\mu(t)|\,dt \leqq H \text{ für alle } n \text{ } (H: \text{eine beliebige feste Konstante}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \overset{n}{\xi}_i = \xi'_i, \qquad \int_{t_0}^{t} K\left(\overset{n}{\varphi}_1(t), \ldots, \overset{n}{\varphi}_\lambda(t)\right) dt \leqq L,$$

wobei die Konstante L die Bedingung $kaLe^{kL} \leqq 1$ erfüllt, und im Sinne der gleichmässigen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} \overset{n}{\varphi}_\mu(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \varphi_\mu(t)\,dt \qquad (t \leqq t_0),$$

gelten dann die Ungleichungen

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \overset{n}{x}_1(t) \geqq x_1(t) \qquad \text{für } t \geqq t_0.$$

III. Es sei eine Folge der Differentialgleichungssysteme

$$\text{(A)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i\left\{t, x_1, \ldots, x_k, \overset{n}{\varphi}_1(t), \ldots, \overset{n}{\varphi}_\lambda(t)\right\}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\lambda} \overset{n}{\varphi}_\mu(t) g_{i\mu}\left\{t, x_1, \ldots, x_k\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, k)$$

vorgelegt, wobei f_i in $\overline{B}$ beschränkt und $g_{i\mu}$ samt ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x_j}(i, j=1, 2, \ldots, k)(\mu=1, \ldots, \lambda)$ in B stetig sind. Die Funktionen $\overset{n}{\varphi}_\mu(t)$ seien im Intervalle $\langle t_0-\delta_n, t_0+\delta_n \rangle$ summierbar. $\overset{n}{x}_i(t)$ seien die für $t_0-\delta_n \leqq t < t_0+\delta_n$ in B liegenden Integralsysteme der Differentialgleichungen (A) mit den Anfangsbedingungen $\overset{n}{x}_i(t_0-\delta_n) = \overset{n}{\xi}_i$. Dann haben wir:

Dafür, dass nur aus den Relationen

$$\int_{t_0-\delta_n}^{t_0+\delta_n} |\overset{n}{\varphi}_\mu(t)|dt \leqq H, \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \overset{n}{\xi}_i = \xi'_i$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0-\delta_n}^{t_0+\delta_n} \overset{n}{\varphi}_\mu(t)dt = \Phi_\mu,$$

wobei $(t_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_k)$ *einen beliebigen inneren Punkt von* B *bedeutet, stets die Gleichungen*

$$\lim_{n\to\infty} \overset{n}{x}_i(t_0+\delta_n) = X_i(\Phi_1, \ldots, \Phi_\lambda; t_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_k)$$

folgen[1], *dabei* X_i *nur von* $\Phi_1, \ldots, \Phi_\lambda, t_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_k$ *abhängige Funktionen bedeuten, ist es notwendig und hinreichend, dass die Funktionen* $g_{i\mu}(i=1, 2, \ldots, k)$ *in* B *der Bedingung*

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x_j} \cdot g_{j\nu} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_j} g_{j\mu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

genügen.

---

1) Das ist für $\lambda=1$ stets der Fall.