175. *Zur Theorie der Kreisscharen im konformen Raume, I.*

By Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Rec. Nov. 17, 1928. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 2, 1928.)

Im folgenden möchte ich eine Theorie der Kreisscharen im konformen Raume in der Form aufstellen, dass sie auf meiner Kugelscharentheorie beruht[1] und dann weitere Ergebnisse vom folgenden Grundprinzip aus erzielen: *Es gilt für Kreisscharen im kleinen nichteuklidische Regelscharentheorie.*

1. Theorie der Kugelbüschelscharen. Betrachtet man ein Paar zueinander senkrechtstehende Kugeln $\xi=\xi(\sigma)$, $\xi'=\xi'(\sigma)$, ($\xi\xi=\xi'\xi'=1$, $\xi\xi'=0$, $d\sigma^2=d\xi d\xi$) allgemeiner Lage des Kreises $\varkappa$ als ein Element der Kreisschar, so bestehen die natürlichen Gleichungen der Kugelschar $\xi(\sigma)$ aus:

$$(1)\quad P^{-1}=[(\ddot{\xi}\ddot{\xi})-1]^{\frac{1}{2}}=f(\sigma),\quad \dot{\xi}=\frac{d\xi}{d\sigma}\ \text{usw.},$$

$$(2)\quad \mathrm{P}_3{}^{-1}=-\mu\tau^{-1}=(\sqrt{\|\xi\dot{\xi}\ddot{\xi}\|^2}):(\sqrt{\|\xi\dot{\xi}\ddot{\xi}\dddot{\xi}\|^2}.\sqrt{\|\xi\dot{\xi}\|^2})=F(\sigma),$$

$$(3)\quad \mathrm{P}_4{}^{-1}=id\log\mu:d\sigma=\Psi(\sigma),$$

wobei P^{-1}=die K-Dualkrümmung, τ^{-1}=die K-Dualtorsion, μ^2=die K-Raumkrümmung[2] sind. Wenn der Kreis $\varkappa$ der Schar auf $\xi(\sigma)$ liegt, so wird seine Lage durch die Kosinus $(\xi't)$, $(\xi'z)$, $(\xi'X)$, $(\xi'\mathfrak{X})$ von den vier Winkeln bestimmt, die der Kreis $\varkappa$ bez. mit der K-Normalkugel (t), K-rektifizierenden Kugel (z), K-Absolutpolare (X) und der K-Absoluten $(\mathfrak{X})$ bilden, die alle kovariant sind und in der Beziehung

$$(4)\quad (\xi't)^2+(\xi'z)^2+(\xi'X)^2+(\xi'\mathfrak{X})^2=1$$

stehen[3]. Also *sind* (1), (2), (3), $(\xi't)=\varphi(\sigma)$, $(\xi'z)=\psi(\sigma)$, $(\xi'X)=\Phi(\sigma)$ *und* $(\xi'\mathfrak{X})=\phi(\sigma)$, *von denen wegen* (4) *nur sechs wesentlich sind, als natürliche Gleichungen der allgemeinen Kugelbüschelschr gebrauchbar.*

---

1) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, I. The Science Reports of the Tohoku Imperial University, Ser. I, 17 (1928). Vgl. E. Vessiot, Contributions à là Géométrie conforme, cercles et surfaces cerclées. Journal de Math., 9. sér. 2 (1923). Wegen der weiteren Literaturen siehe diese Arbeit Herrn Vessiots.

2) Takasu, a.a.O., SS. 290 und 293.

3) Die genannten Kosinus sind bare tetrazyklische Koordinaten auf ξ. Wenn die ersten drei gegeben sind, wird die vierte bis auf das Vorzeichen bestimmt, das von der Orientierung von $\mathfrak{X}$ abhängt.

2. Folgerungen. Wenn $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ ($\mathfrak{x}\mathfrak{x}=0,\ \bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{x}}=0,\ \mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}=2k^2,\ d\mathfrak{x}\,\bar{\mathfrak{x}}=-\mathfrak{x}\,d\bar{\mathfrak{x}}=0$) die Brennpunkte des Kreises $\varkappa$ sind, so *sind die zwei dasselbe Winkelelement beschreibenden Kugeln* ξ^*, $\xi^{*\prime}$ des Kugelbüschels $\varkappa$ durch (5) gegeben:

$$(5)\quad \xi^*=(\breve{\mu}\mathfrak{x}+i\breve{\bar{\mu}}\bar{\mathfrak{x}}):2\sqrt{i},\quad \xi^{*\prime}=(\breve{\mu}\mathfrak{x}-i\breve{\bar{\mu}}\bar{\mathfrak{x}}):2i\sqrt{i},$$
$$(\xi^*\xi^*=\xi^{*\prime}\xi^{*\prime}=1,\quad \xi^*\xi^{*\prime}=0),$$

wobei

$$(6)\quad k\breve{\mu}=(d\bar{\mathfrak{x}}\,d\bar{\mathfrak{x}}:d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x})^{\frac{1}{4}},\quad k\breve{\bar{\mu}}=(d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}:d\bar{\mathfrak{x}}\,d\bar{\mathfrak{x}})^{\frac{1}{4}},\quad \breve{\mu}\breve{\bar{\mu}}=k^{-2}\ \text{(konst.)}$$

gesetzt sind. Die Halbierungskugeln $\breve{\tilde{\xi}}$, $\breve{\tilde{\xi}}'$ der Winkel zwischen ξ^* und $\xi^{*\prime}$ sind durch (7) gegeben[4]:

$$(7)\quad \breve{\tilde{\xi}}=(\xi^*+\xi^{*\prime}):\sqrt{2}=(\breve{\mu}\mathfrak{x}+\breve{\bar{\mu}}\bar{\mathfrak{x}}):2,\quad \breve{\tilde{\xi}}'=(\xi^*-\xi^{*\prime}):\sqrt{2}=(\breve{\mu}\mathfrak{x}-\breve{\bar{\mu}}\bar{\mathfrak{x}}):2,$$
$$(\breve{\tilde{\xi}}\breve{\tilde{\xi}}=\breve{\tilde{\xi}}'\breve{\tilde{\xi}}'=1,\ \breve{\tilde{\xi}}\breve{\tilde{\xi}}'=0,\ d\tilde{\sigma}^2=d\tilde{\xi}\,d\tilde{\xi}).$$

Weiter gelten die folgenden Beziehungen:

$$(8)\quad \breve{\mu}=k^{-1}\exp i\int(\breve{\tilde{\xi}}\,d\breve{\tilde{\xi}}')=\exp\Big[(2i)^{-1}k^2\int(\xi^{*\prime}d\xi^*)\Big],$$

$$(9)\quad 4i(d\breve{\tilde{\xi}}'d\breve{\tilde{\xi}})=\breve{\mu}^2(d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x})-\breve{\bar{\mu}}^2(d\bar{\mathfrak{x}}\,d\bar{\mathfrak{x}})=2i(d\xi^*d\xi^*-d\xi^{*\prime}d\xi^{*\prime})=0,$$

$$(10)\quad d\tilde{\sigma}^2-d\breve{\tilde{\xi}}'d\breve{\tilde{\xi}}'=\breve{\mu}^2(d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x})=\breve{\bar{\mu}}^2(d\bar{\mathfrak{x}}\,d\bar{\mathfrak{x}})=d\xi^*d\xi^{*\prime}=d\breve{s}^2,\ \text{(Wir setzen so!)}$$

$$(11)\quad d\sigma^{*2}=d\xi^*d\xi^*=d\xi^{*\prime}d\xi^{*\prime}=d\breve{\tilde{\xi}}d\breve{\tilde{\xi}}+d\breve{\tilde{\xi}}'d\breve{\tilde{\xi}}'=\breve{\mu}\breve{\bar{\mu}}(d\mathfrak{x}\,d\bar{\mathfrak{x}}).$$

1°. Kreisscharentheorie I. Wenn man für ξ von Art. 1 die Kugel $\breve{\tilde{\xi}}$ annimmt, so gelten:

$$(\breve{\tilde{\xi}}'\tilde{z})=\breve{\tilde{\xi}}'\frac{d\breve{\tilde{\xi}}}{d\tilde{\sigma}}=id\log\breve{\mu}:d\tilde{\sigma},$$
$$(12)\quad (\breve{\tilde{\xi}}'\tilde{t})=\tilde{P}\Big[(\breve{\tilde{\xi}}'\breve{\tilde{\xi}})+\Big(\breve{\tilde{\xi}}'\frac{d^2\breve{\tilde{\xi}}}{d\tilde{\sigma}^2}\Big)\Big]=i\tilde{P}\frac{d^2\log\tilde{\mu}}{d\tilde{\sigma}^2}=\tilde{P}\frac{d}{d\tilde{\sigma}}(\breve{\tilde{\xi}}'\tilde{z}),$$
$$(\breve{\tilde{\xi}}'\tilde{t})^2+(\breve{\tilde{\xi}}'\tilde{z})^2+(\breve{\tilde{\xi}}'\tilde{X})^2+(\breve{\tilde{\xi}}'\tilde{\mathfrak{x}})^2=1.$$

4) $\breve{\tilde{\xi}}$ und $\breve{\tilde{\xi}}'$ sind innerhalb des Kugelbüschels $\varkappa$ dadurch gekennzeichnet, dass die durch sie beschriebenen Winkelelemente extrem sind. Sie sind Tangentialkugeln der durch $\varkappa$ erzeugten Fläche in den "Zentralpunkten." Also ist $d\sigma^*$ das durch die Halbierungskugeln ξ^*, $\xi^{*\prime}$ des Winkels $(\breve{\tilde{\xi}}, \breve{\tilde{\xi}}')$ beschriebene Winkelelement. Die $\breve{\tilde{\xi}}$ und ξ^* entsprechenden Grössen wollen wir bez. mit $\sim$ und $*$ bezeichnen.

Also *sind* $\cos(\tilde{\ddot{\xi}}'\tilde{z})$, $\cos(\tilde{\ddot{\xi}}'\tilde{X})$, $\cos(\tilde{\ddot{\xi}}'\mathfrak{X})$, $\tilde{\ddot{P}}$, $\tilde{\ddot{\mathbf{P}}}_3$ *und* $\tilde{\ddot{\mathbf{P}}}_4$ (*oder* $\cos(\tilde{\ddot{\xi}}'\tilde{\ddot{t}})$, $\cos(\tilde{\ddot{\xi}}'\tilde{\ddot{X}})$, $\cos(\tilde{\ddot{\xi}}'\tilde{\ddot{\mathfrak{X}}})$, $\tilde{\ddot{\mu}}$, $\tilde{\ddot{P}}$, und $\tilde{\ddot{\tau}}$), *von denen wegen* $(12)_3$ *nur fünf wesentlich sind, als natürliche Gleichungen der allgemeinen Kreisschar gebrauchbar.*

2°. Kreisscharentheorie II. Wenn man für ξ von Art. 1 die Kugel ξ^* annimmt, so ist $\xi^{*\prime}=sz^*+pt^*+qX^*+u\mathfrak{X}^*$ und gelten:

$$(13)\quad s^2+p^2+q^2+u^2\equiv(\xi^{*\prime}z^*)^2+(\xi^{*\prime}t^*)+(\xi^{*\prime}X^*)^2+(\xi^{*\prime}\mathfrak{X}^*)^2=1\,,$$

$$(14)\quad (z^{*\prime}z^*)^2+(z^{*\prime}t^*)^2+(z^{*\prime}X^*)^2+(z^{*\prime}\mathfrak{X}^*)^2+(z^{*\prime}\xi^*)^2$$

$$\equiv\left(-\frac{p}{P^*}+\frac{ds}{d\sigma^*}\right)^2+\left(\frac{s}{P^*}+\frac{\mu^*q}{\tau^*}+\frac{dp}{d\sigma^*}\right)^2+\left(-\frac{\mu^*p}{\tau^*}-\frac{ui}{\mu^*}+\frac{dq}{d\sigma^*}\right)^2$$

$$+\left(\frac{qi}{\mu^*}\frac{d\mu^*}{d\sigma^*}+\frac{du}{d\sigma^*}\right)^2+s^2=1\,,$$

wobei $z^{*\prime}=\dfrac{d\xi^{*\prime}}{d\sigma^*}$ gesetzt ist[5].

Also *sind* s, p, q, u, (*von denen wegen* (13), (14) *nur zwei wesentlich sind*), P^*, $\mathbf{P}_3{}^*$ *und* $\mathbf{P}_4{}^*$ (*oder* μ^*, P^* *und* τ^*) *als natürliche Gleichungen der allgemeinen Kreisschar gebrauchbar.*

N.B. Wir können noch weitere Folgerungen herausziehen[6].

---

5) Man berechnet (14) mittels der Formeln (306), Takasu, a.a.O

6) **3°. Kurventheorie mit Schmiegungskreisen als Elementen.** Wählt man die Kugel ξ' des Art. 1 so, dass die den Schmiegungskreis der K-Rückkehrkante von ξ enthält und zur ξ senkrecht steht, so wird:

$$(\xi'z)=1,\quad (\xi't)=0,\quad (\xi'\mathfrak{X})=i:\mu R=-i\tau:\mu P,\quad (\xi'X)^2+(\xi'\mathfrak{X})^2=1,$$

weobei R^{-1} die K-Krümmung ist. Wählt man noch für ξ die Halbierungskugel $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y+\frac{dy}{d\theta}\right)$ des Winkels zwischen der Schmiegungskugel y und der Normalkugel $\frac{dy}{d\theta}\left(\left(\frac{dy}{d\theta}\,\frac{dy}{d\theta}\right)=1\right)$, so gilt: $\cot(y,\xi)=\frac{d}{d\theta}\log\left(\frac{P}{\tau}\right)=\pm1$. Also *sind* P *und* μ *als natürliche Gleichungen der allgemeinen Kurve gebrauchbar, wobei* $P^{-2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^3y}{d\theta^3}\,\frac{d^3y}{d\theta^3}\right)-1\right]$ *ist.* (Vgl. T. Takasu, Differentialkugelgeometrie II, a.a.O.) In diesem Falle wird: $0=(d\xi'\,d\xi')-(d\xi\,d\xi)$, $(d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x})=0$, $(d\bar{\mathfrak{x}}\,d\bar{\mathfrak{x}})=0$.

4°. Kugelscharentheorie im konformen Raume mit K-Tangenten als Elementen. Nimmt man in Art. 1 $\xi'=z$ an, so gelten:

$$(\xi'z)=1,\quad (\xi't)=0,\quad (\xi'\mathfrak{X})=0,\quad (\xi'X)=0.$$

Also *sind* P, μ *und* τ *als natürliche Gleichungen allgemeiner Kugelschar gebrauchbar.*

5°. Natürliche Gleichungen der Kreisscharen im N.E. Raume. Adjungiert man bei der Theorie von Art. 1 die Kugel $\mathfrak{X}=0, 0, 0, 0, 1$, so gelten:

$(\mathfrak{X}\xi)=\xi_5=0,\quad d\sigma^2=(d\xi d\xi),\quad (\mathfrak{X}t)=t_5=0,\quad (\mathfrak{X}z)=z_5=0,$
$(\mathfrak{X}X)=X_5=0,\quad \mu=$konst., $\tau^1=$Dualtorsion der Torse $\xi=\xi(\sigma)$.

Also *sind* $\cos(\varkappa,$ Tangente von $\xi)$, $\cos(\varkappa,$ Hauptnormale von $\xi)$, $\cos(\varkappa,$ Dualbinormale von $\xi)$, $P^{-1}=$Dualkrümmung, $\tau=$Torsion (als Funktionen vom Torsionswinkel σ) *als natürliche Gleichungen der Kreisschar im N.E. Raum gebrauchbar.*

6°. Reguli-theorie im N.E. Raume mit Geraden als Elementen. Betrachtet man den Fall von 5°, dass der Kreis $\varkappa$ eine Gerade auf der Schmiegungsebene $\xi=\tilde{\xi}$ wird und also $\xi'=\tilde{\xi}'$ in eine Ebene übergeht, so ist

$$\cos(\tilde{\xi}'\,\tilde{t})=\tilde{P}d\cos(\tilde{\xi}',\tilde{z}):d\tilde{\sigma},\quad \tilde{\mu}=\text{konst.},\quad \cos^2(\tilde{\xi}',\tilde{t})+\cos^2(\tilde{\xi}',\tilde{z})+\cos^2(\tilde{\xi}',\tilde{X})=1.$$

Also *sind* $\cos(\varkappa,$ Tangente), $\cos(\varkappa,\tilde{X})$, $\tilde{P}$ *und* $\tilde{\tau}$, *von denen nur drei wesentlich sind, als natürliche Gleichungen des allgemeinen Regulus gebrauchbar, wobei* $\tilde{\xi}'$ *und* $\tilde{\xi}$ *je eine kovariante Ebene des Regulus und* $\tilde{z}$ *die rektifizierende Ebene von* $\tilde{\xi}$ *sind.*

7°. Kurventheorie im N.E. Raume mit Tangenten als Elementen. In diesem Falle ist $\cos(\tilde{\xi}',\tilde{z})=1$. Also *sind* $\tilde{P}$ *und* $\tilde{\tau}$ *als natürliche Gleichungen allgemeiner N.E. Kurven gebrauchbar.*

Bei der Korrektur: Eine Arbeit Herrn S. Nakajimas über Kreisscharentheorie ist jetzt unter der Presse. Es handelt sich bei ihm um " modifizierte Ableitung," die an den Begriff " modifizierter Kalkül " Herrn Thomsens schliesst.