174. *Endgültige Fundamentalsätze der Kugelkongruenzentheorie im konformen Raume, II.*[1]

By Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 2, 1928.)

3. Zwei natürliche Individualisierungsweisen von der instantanen Absoluten A und der instantanen Absolutpolare U.

(i) Ich habe schon[2] die zwei Kugeln A und U innerhalb des linearen Kugelsystems $l\mathfrak{x}+m\bar{\mathfrak{x}}$ dadurch individualisiert, dass *die beiden Zentralkugeln η und $\bar\eta$ in Bezug auf A invers werden*:

$$(7)\quad \begin{aligned} A&=(\mu\mathfrak{x}-\bar\mu\bar{\mathfrak{x}}):2\equiv(\mathfrak{x}'-\bar{\mathfrak{x}}'):2, &\mu&\equiv k^{-1}\sqrt{H/\bar H}\equiv k^{-1}\sqrt{(\bar{\mathfrak{x}}\eta)_5/(\mathfrak{x}\bar\eta)_5}\,,\\ U&=i(\mu\mathfrak{x}+\bar\mu\bar{\mathfrak{x}}):2\equiv i(\mathfrak{x}'+\bar{\mathfrak{x}}'):2, &\bar\mu&\equiv k^{-1}\sqrt{\bar H/H}\equiv k^{-1}\sqrt{(\mathfrak{x}\bar\eta)_5/(\bar{\mathfrak{x}}\eta)_5}\,. \end{aligned}$$

Es ist sehr leicht zu zeigen, dass

$$(8)\quad (U\eta'')_5=(U\bar\eta'')_5=\varepsilon ik/\sqrt{H\bar H}\,,\qquad (U\eta')_5=(U\bar\eta')_5=\varepsilon i\,,$$

sodass η', $\bar\eta'$ *bez.* η'', $\bar\eta''$ *in Bezug auf U invers werden.*

(ii) Individualisiert man nun innerhalb des Kugelbüschels $l\mathfrak{x}+m\bar{\mathfrak{x}}$ die Kugel A, sodass *die Tangentialkugeln χ und $\bar\chi$ in Bezug auf A invers werden, so hat man*

$$(9)\quad \check A=\varepsilon(\tilde\mu\mathfrak{x}+\bar{\tilde\mu}\bar{\mathfrak{x}}):2=\varepsilon(\check{\mathfrak{x}}+\check{\bar{\mathfrak{x}}}):2,\qquad \tilde\mu\equiv k^{-1}\sqrt{\bar{\mathfrak{H}}/\mathfrak{H}}\equiv k^{-1}\bar{\mathfrak{H}}/\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}\,,$$

$$(10)\quad \check U=i\varepsilon(\tilde\mu\mathfrak{x}-\bar{\tilde\mu}\bar{\mathfrak{x}}):2=i\varepsilon(\check{\mathfrak{x}}-\check{\bar{\mathfrak{x}}}):2,\qquad \bar{\tilde\mu}\equiv k^{-1}\sqrt{\mathfrak{H}/\bar{\mathfrak{H}}}\equiv k^{-1}\mathfrak{H}/\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}\,.$$

χ und $\bar\chi$ berühren A.

Es ist leicht zu zeigen, dass

$$(11)\quad (\check A\chi')_5=\varepsilon k\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}=(\check A\bar\chi')_5,\quad (\check A\chi'')_5=\varepsilon k/\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}=(\check A\bar\chi'')_5,\quad (\varepsilon=\pm1),$$

sodass χ', $\bar\chi'$ bez. χ'', $\bar\chi''$ in Bezug auf $\check A$ invers werden.

Wir können nun beweisen[3]:

---

1) Vgl. Teil I. Dieses Proc. S. 157.

2) Siehe Abschnitt II, S. 362, Fussnote 1), S. 157.

3) Nach der Formel $(536)_1$, S. 366, a.a.O.

$$\xi_{hk}=-\mathfrak{g}_{hk}\xi+\frac{1}{2k^2}(\bar D_{hk}\mathfrak{x}+D_{hk}\bar{\mathfrak{x}})$$

haben wir

$$(a)\qquad \mathfrak{g}^{hk}\xi_{hk}/2+\xi=(\bar{\mathfrak{H}}\mathfrak{x}+\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{x}})/2k^2.$$

Aus (9) und (a) ergibt sich

$$\check A=k(\xi+\mathfrak{g}^{hk}\xi_{hk}/2):\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}\,.$$

Wegen $(\check A\check A)_5=1$, erhält man $\sqrt{\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}=k[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})/4-1]^{\frac{1}{2}}$, worans folgen (12) und (13).

Die Formeln (12) und (13) versagen für die Zentralkugelkongruenz.

$$(12)\quad \check{A}=(\xi+\mathfrak{g}^{rs}\xi_{rs}/2):[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})_5/4-1]^{\frac{1}{2}},$$

$$(13)\quad \check{U}=-\mathfrak{S}^{pq}\,||\,\xi\,\xi_p\xi_q\check{A}\,||:2=-\mathfrak{S}^{pq}\mathfrak{g}^{rs}\,||\,\xi\,\xi_p\xi_q\xi_{rs}\,||$$
$$:4[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})_5/4-1]^{\frac{1}{2}}.$$

4. Darstellung von $\check{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\check{\mathfrak{x}}}$ mittels ξ, ξ_h, ξ_{hk} allein.

Aus (9), (10), (12) und (13) ergibt sich

$$(14)\quad \varepsilon\check{\mathfrak{x}}=k(\check{A}-i\check{U})=[\xi+\mathfrak{g}^{rs}\xi_{rs}/2+i\mathfrak{S}^{pq}\mathfrak{g}^{rs}||\,\xi\,\xi_p\xi_q\xi_{rs}\,||\,/4]$$
$$:[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})_5/4-1]^{\frac{1}{2}},$$

$$(15)\quad \varepsilon\bar{\check{\mathfrak{x}}}=k(\check{A}+i\check{U})=[\xi+\mathfrak{g}^{rs}\xi_{rs}/2-i\mathfrak{S}^{pq}\mathfrak{g}^{rs}||\,\xi\,\xi_p\xi_q\xi_{rs}||\,/4]$$
$$:[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})_5/4-1]^{\frac{1}{2}}.$$

5. Darstellung von $\check{D}_{hk}$, $\bar{\check{D}}_{hk}$, $\check{\vartheta}_{hk}$ und $\bar{\check{\vartheta}}_{hk}$ mittels ξ, ξ_h, ξ_{hk} allein.
Mit Rücksicht auf (14) und (15) haben wir

$$(16)\quad \varepsilon\check{D}_{hk}=[-\mathfrak{g}_{hk}+\mathfrak{g}^{rs}(\xi_{rs}\xi_{hk})_5/2+i\mathfrak{S}^{pq}\mathfrak{g}^{rs}|\,\xi\,\xi_p\xi_q\xi_{rs}\xi_{hk}|/4]$$
$$:[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})_5/4-1]^{\frac{1}{2}},$$

$$(17)\quad \varepsilon\bar{\check{D}}_{hk}=[-\mathfrak{g}_{hk}+\mathfrak{g}^{rs}(\xi_{rs}\xi_{hk})_5/2-i\mathfrak{S}^{pq}\mathfrak{g}^{rs}|\,\xi\,\xi_p\xi_q\xi_{rs}\xi_{hk}|/4]$$
$$:[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})_5/4-1]^{\frac{1}{2}}.$$

Nach (12) und (13) haben wir übrigens

$$(18)\quad \check{\vartheta}_{hk}=(\check{A}\xi_{hk})_5=[-\mathfrak{g}_{hk}+\mathfrak{g}^{rs}(\xi_{rs}\xi_{hk})_5/2]:[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})_5/4-1]^{\frac{1}{2}},$$

$$(19)\quad \bar{\check{\vartheta}}_{hk}=(\check{U}\xi_{hk})_5=[-\mathfrak{S}^{pq}\mathfrak{g}^{rs}||\xi\,\xi_p\xi_q\xi_{rs}\xi_{hk}||]:4[\mathfrak{g}^{rs}\mathfrak{g}^{pq}(\xi_{rs}\xi_{pq})_5-1]^{\frac{1}{2}}.$$

6. Endgültige Formulierung der Fundamentalsätze der Kugelkongruenzentheorie im konformen Raume. Um aus den Fundamentalsätzen I–IV ihre endgültigen Formulierungen zu erzielen, können wir jede Normierungsweisen (i), (ii) für $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ sowie jede Individualisierungsweisen (i), (ii) für A und U aufnehmen. Aber um die Vorteile von Artt. 4 und 5 herrschen zu lassen wollen wir hier ausschliesslich die Normierungsweise (i), $\check{(2)}_1$ für $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ sowie die Individualisierungsweise (ii) für $\check{A}$ und $\check{U}$ aufnehmen. So gelangen wir den endgültigen Formulierungen der Fundamentalsätze der Kugelkongruenzentheorie im konformen Raume:

Fundamentalsatz I′. *Wenn zwei quadratische Formen $\mathfrak{g}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ und $\check{D}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ für zwei Kugelkongruenzen gebildet werden, so ist es für die Kongruenz (unter konformer Gruppe) der beiden Kugelkongruenzen notwendig und hinreichend, dass die zwei Paare dieser Fundamentalformen der Bedingung*

$$\check{\mathfrak{G}}^{pq}\check{Y}_{pq} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \check{\mathfrak{G}}^{rs}(\check{Y}_{rsq}-\check{Y}_{rs}\check{Z}_q) & \check{\mathfrak{G}}^{rs}\check{Y}_{rs} \\ \check{\mathfrak{G}}^{rs}\{\check{Y}_{rs}\check{Z}_q+(\check{Y}_r\check{Z}_s)_q-\check{Z}_{rsq}\} & \check{\mathfrak{G}}^{rs}(\check{Y}_r\check{Z}_s-\check{Z}_{rs}) \end{vmatrix} = 0$$

genügen[1] *und dass diese zwei Paare mit einander kovariant sind. Der Fall* $\mathfrak{g}=G^{-1}D^2=0$ *von Krümmungskugelkongruenzen ist ausgeschlossen*[2].

Dabei und *im folgenden* sollen die mit $\vee$ bezeichneten Buchstaben den obigen Vektoren $\check{\mathfrak{x}}$, $\check{\bar{\mathfrak{x}}}$, $\check{A}$, $\check{U}$ entsprechen.

Fundamentalsatz II′. *Wenn zwei quadratische Formen* $\check{G}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *und* $\check{D}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *für zwei Kugelkongruenzen* ($\check{G} \neq 0$, $\check{D} \neq 0$) *gebildet werden, so ist es für die Kongruenz (unter konformer Gruppe) der beiden Kugelkongruenzen notwendig und hinreichend, dass die zwei Paare dieser Fundamentalformen der Bedingung*[3]

$$\check{E}^{pq}\check{U}_{pq} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \check{E}^{rs}(\check{U}_{rsq}-\check{U}_{rs}\check{V}_q) & \check{E}^{rs}\check{U}_{rs} \\ \check{E}^{rs}\{\check{U}_{rs}\check{V}_q+(\check{U}_r\check{V}_s)_q-\check{V}_{rsq}\} & \check{E}^{rs}(\check{U}_r\check{V}_s-\check{V}_{rs}) \end{vmatrix} = 0$$

genügen und dass diese zwei Paare mit einander kovariant sind.

Fundamentalsatz III′. *Wenn zwei quadratische Formen* $\mathfrak{g}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *und* $\check{D}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *für zwei Kugelkongruenzen gebildet werden, so ist es für die Kongruenz (unter konformer Gruppe) der beiden Kugelkongruenzen notwendig und hinreichend, dass die zwei Paare dieser Fundamentalformen der Bedingung*[4]

$$\check{\mathfrak{G}}^{rs}\check{R}_{rs} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \check{\mathfrak{G}}^{rs}(\check{R}_{rsq}-\check{R}_{rs}\check{S}_q) & \check{\mathfrak{G}}^{rs}\check{R}_{rs} \\ \check{\mathfrak{G}}^{rs}\{\check{R}_{rs}\check{S}_q+(\check{R}_r\check{S}_s)_q-\check{S}_{rsq}\} & \check{\mathfrak{G}}^{rs}(\check{R}_r\check{S}_s-\check{S}_{rs}) \end{vmatrix} = 0$$

genügen und dass diese zwei Paare mit einander kovariant sind. Der Fall von Krümmungskugelkongruenzen $\mathfrak{g}G \equiv D \equiv \bar{D} = 0$ *ist ausgeschlossen*[5].

---

1) Abschnitt II, a.a.O., S. 372, Formeln $(555)_1$, $(555)_2$.

2) Diesen Ausnahmefall habe ich in einer getrennten Arbeit behandelt: T. Takasu, Zur konformen Flächentheorie mit Krümmungskugeln als Elementen. Proc. Imper. Acad. of Japan, **4** (1928).

Wenn $\check{D}_{hk}du^h du^k$ gegeben ist, so kann man $\check{\bar{D}}_{hk}du^h du^k$ entweder nach der Formel $(549)_2$ (Abschnitt II, a.a.O., S. 385) oder nach (17) ohne weiteres gewinnen. So vergleicht man ($\check{D}_{hk}du^h du^k$, $\check{\bar{D}}_{hk}du^h du^k$) (als ganzes) für zwei gegebene Kugelkongruenzen um ihre ineinander Transformierbarkeit zu entscheiden.

3) Abschnitt II, a.a.O., S. 379, $(573)_1$ und (574). Dem Ausnahmefalle $\check{G}=0$ entspricht keine reelle Figur. Siehe die letzte Fussnote!

4) Abschnitt II, a.a.O., S. 886, $(592)_1$ und (593).

5) Wegen dieses Ausnahmefalls siehe die Fussnote zum Fundamentalsatze I′.

Wenn $\check{D}_{hk}du^h du^k$ gegeben ist, so kann man $\check{\bar{D}}_{hk}du^h du^k$ entweder nach der Fommel $(587)_2$ (Abschnitt II, a.a.O., S. 385) oder nach (17) ohne weiteres gewinnen. So wird die Behandlung für $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ symmetrisch.

Fundamentalsatz IV′. *Wenn zwei quadratische Formen* $\check{G}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *und* $\check{D}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *für zwei Kugelkongruenzen* ($\bar{D}^2 \equiv \mathscr{G}G \equiv D^2 \neq 0$) *gebildet werden, so ist es für die Kongruenz (unter konformer Gruppe) der beiden Kugelkongruenzen notwendig und hinreichend, dass die zwei Paare dieser Fundamentalformen der Bedingung*[1].

$$\check{E}_{pq}\check{\mathcal{U}}_{pq} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \check{E}^{rs}(\check{\mathcal{U}}_{rsq} - \check{\mathcal{U}}_{rs}\check{\vartheta}_q) & \acute{E}^{rs}\check{\vartheta}_{rs} \\ \check{E}^{rs}\{\check{\mathcal{U}}_{rs}\check{\vartheta}_q + (\check{\mathcal{U}}_r\check{\vartheta}_s)_q - \check{\vartheta}_{rsq}\} & \check{E}^{rs}(\check{\mathcal{U}}_r\check{\vartheta}_s - \check{\vartheta}_{rs}) \end{vmatrix} = 0$$

genügen und dass diese zwei Paare mit einander kovariant sind[2].

Fundamentalsatz V′. *Wenn drei quadratische Formen* $\mathscr{G}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$, $\check{\vartheta}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *und* $\bar{\check{\vartheta}}_{hk}(u^1, u^2)du^h du^k$ *für zwei Kugelkongruenzen* ($\mathscr{G} \neq 0$, $\check{\vartheta} \neq 0$, $\bar{\check{\vartheta}} \neq 0$) *gebildet werden, so ist es für die Kongruenz (unter konformer Gruppe) der beiden Kugelkongruenzen notwendig und hinreichend, dass die zwei Paare dieser Fundamentalformen der Bedingung*[3]

$$\mathfrak{K}^{\mathscr{G}} = 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{G}^{th}\mathfrak{G}^{kl}(\check{\vartheta}_{hk}\check{\vartheta}_{lt} + \bar{\check{\vartheta}}_{hk}\bar{\check{\vartheta}}_{lt}) \equiv 1 + \frac{\check{\vartheta}}{\mathscr{G}} + \frac{\bar{\check{\vartheta}}}{\mathscr{G}},$$

$$\mathfrak{G}^{kl}\bar{\check{\vartheta}}^{hp}\check{\vartheta}_{hkl} = \mathfrak{G}^{kl}\check{\vartheta}^{hp}\bar{\check{\vartheta}}_{hkl},$$

$$\mathfrak{G}^{sl}(\check{\vartheta}^{hk}\bar{\check{\vartheta}}_{hslk} + \check{\vartheta}_k{}^{hk}\bar{\check{\vartheta}}_{hsl}) = \mathfrak{G}^{hk}\check{\mathscr{G}}^{sp}\check{\vartheta}_{sk}\bar{\check{\vartheta}}_{hp}$$

genügen und dass diese zwei Paare mit einander kovariant sind. Den ausgeschlossenen Fall $\mathscr{G} \equiv G^{-1}D^2 = 0$ *von Krümmungskugelkongruenzen habe ich schon anderswo behandelt*[4]

N.B. Diese Formulierungen (I′–V′) versagen für die Zentralkugelkongruenzen $\mathfrak{H} = 0$, $H = 0$. Aber, den Fundamentalsatz der Theorie von Zentralkugelkongruenzen habe ich schon fertig gemacht[5].

Als Folge dieser Abhandlung werden die ganzen Ergebnisse vom Abschnitt II[6] *konkreter und lebhafter.*

---

1) Abschnitt II, a.a.O., S. 392, $(612)_1$, $(612)_2$.

2) Dem Falle $\check{G} = 0$ entspricht keine reelle Figur. Siehe die letzte Fussnote!

3) Abschnitt II, a.a.O., S. 394, (616), (628), (629).

4) A.a.O.

5) Abschnitt II, a.a.O., S. 565.

6) Fussnote 1), S. 157.