41. *Sur la Dynamique des Amas Globulaires Stellaires.*

Par Takehiko MATUKUMA.

(Comm. by K. HIRAYAMA, M.I.A., April 12, 1930.)

Dans ce mémoire nous proposerons d'étudier le problème suivant: Trouver la loi des densités dans l'intérieur d'un amas globulaire stellaire d'après les conditions suivantes:

(i) L'amas est dans un état permanent,

(ii) il a la symétrie sphérique,

(iii) à chaque point dans l'amas, il existe la distribution ellipsoïdale des vitesses spatiales, proposée par M. Schwarzschild.[1]

Ce problème a déjà été étudié par M. Eddington.[2] Mais sa méthode n'est pas simple. Dans ce qui suit je me suis efforcé de prendre une autre voie plus claire.

Dans un amas quelconque des particules, soit molécules soit étoiles, considérons la fonction F de la distribution des vitesses. Si cet amas satisfait aux deux premières conditions mentionnées ci-dessus, alors F est une fonction arbitraire de $2\phi - V^2$ et rT, où

r = rayon vecteur du centre,

u = vitesse radiale,

$V = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$ = vitesse totale,

$T = \sqrt{v^2+w^2}$ = vitesse transversale,

ϕ = fonction potentielle d'un point, telle que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \text{etc.}$$

Ce théorème est dû à M. Jeans.[3]

Considérons maintenant un amas globulaire stellaire, qui satisfait très approximativement à la deuxième condition, c'est-à-dire celle de la symétrie sphérique. Quant à la première condition, il n'est pas claire que les amas dans notre univers sont dans un état permanent. Mais le fait que presque tous les amas semblent avoir la même répartition des étoiles à l'intérieur nous montre que cet état permanent est déjà approximativement atteint. Ainsi nous poserons cette premiere condition, et aussi nous y ajouterons la troisième,—l'hypothèse

1) Schwarzschild, Gött. Nachr., (1907), p. 614.

2) Eddington, M.N. **75** (1915), p. 366.

3) Jeans, Problems of Cosmogony (1919), p. 234,

ellipsoïdale de M. Schwarzschild sur la distribution des vitesses dans l'éspace.

Cette dernière condition et celle de la symétrie sphérique conduisent F à la forme

$$F = Ae^{-h^2u^2 - h'^2T^2},$$

où A, h et h' sont en général les fonctions de r.

Posons maintenant

$$\begin{cases} A = A'e^{2h^2\phi} \\ h'^2 = h^2 + k^2r^2, \end{cases}$$

de telle sorte que nous aurons

$$F = A'e^{h^2(2\phi - V^2) - k^2r^2T^2}.$$

Par le théorème de M. Jeans, qui nous montre que F doit être une fonction de $2\phi - V^2$ et rT, nous conclurons que A', h et k doivent être constants partout dans l'amas. Alors la densité des étoiles sera donnée par la formule suivante:

$$\rho = 2\pi\iint F du T dT = \text{Const}\frac{e^{2h^2\phi}}{h^2 + k^2r^2}.$$

L'équation de Poisson, $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ nous donne

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + C\frac{e^{2h^2\phi}}{h^2 + k^2r^2} = 0 \qquad (C > 0).$$

En posant

$$\begin{cases} r = \dfrac{h}{k}r_1, \\ \phi = \dfrac{1}{h^2}\left\{\phi_1 - \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{h^2}{k^2}C\right)\right\}, \end{cases}$$

nous aurons l'équation pour la fonction potentielle dans sa forme la plus réduite:

$$\frac{d^2\phi_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1}\frac{d\phi_1}{dr_1} + \frac{e^{2\phi_1}}{1 + r_1^2} = 0. \tag{1}$$

Si cette équation est résolue, la densité sera donnée par la formule

$$\rho = \text{Const}\frac{e^{2h^2\phi}}{h^2 + k^2r^2} = \rho_0\frac{e^{2\phi_1}}{1 + r_1^2}, \tag{2}$$

où ρ_0 est la densité au centre de l'amas.

Comme un cas spécial, nous consacrerons quelques lignes au cas de la distribution sphérique. Dans ce cas $k = 0$, et par les transformations convenables nous aurons

$$\frac{d^2\phi_2}{dr_2^2}+\frac{2}{r_2}\frac{d\phi_2}{dr_2}e^{2\phi_2}=0\,, \tag{3}$$

$$\rho=\rho_0 e^{2\phi_2}\,. \tag{4}$$

L'équation (1) admet, au centre de l'amas, une solution de ϕ_1 dévéloppable suivant les puissances de r_1, qui s'écrit:

$$-\phi_1=\frac{r_1^2}{6}-\frac{r_1^4}{15}+\frac{4\cdot 137}{21\cdot 6\,!}r_1^6-\cdots\cdots\,.$$

Au-delà d'une certaine valeur de r_1, la série écrite ci-dessus cessera d'être convergente, et il faut prendre une autre voie pour avancer plus loin. En posant $r_1=\tan\theta$, j'ai calculé, par la méthode d'intégration numérique, ϕ_1 en fonction de θ jusqu'à $\theta=86°$. Voici la table:[1]

θ	r_1	$-\phi_1$	$-\frac{d\phi_1}{dr_1}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$
—	0.00	.00000	.00000	1.00000
—	.05	.00042	.01664	.99666
—	.10	.00166	.03306	.98681
—	.15	.00372	.04912	.97075
—	.20	.00656	.06460	.94901
—	.25	.01017	.07937	.92224
—	.30	.01449	.09329	.89125
—	.35	.01948	.10627	.85685
—	.40	.02509	.11823	.81988
—	.45	.03128	.12913	.78117
—	.50	.03799	.13896	.74147
—	.55	.04516	.14770	.70145
—	.60	.05274	.15541	.66168
—	.65	.06068	.16208	.62264
—	.70	.06893	.16781	.58471
—	.75	.07744	.17263	.54817
—	.80	.08618	.17661	.51322
—	.85	.09508	.17983	.48002
—	.90	.10414	.18234	.44861
—	.95	.11330	.18420	.41905
45°	1.00	.12254	.18549	.39132
50°	1.1918	.1583	.1861	.30107
55°	1.4282	.2017	.1806	.21978
60°	1.7321	.2548	.1685	.15018
65°	2.1445	.3204	.1496	.09395
70°	2.7475	.4028	.1242	.05227
73°	3.2709	.4630	.1061	.03387
76°	4.0108	.5338	.0863	.02013
79°	5.1446	.6189	.0654	.01056
82°	7.1154	.7244	.0440	.00455
84°	9.5144	.8117	.0302	.00215
86°	14.301	.9209	.0175	.000749

1) J'ai calculé d'abord avec l'argument r_1 et puis avec θ.

Pousser le calcul plus loin jusqu'à $r_1 \rightarrow \infty (\theta \rightarrow 90^\circ)$, c'est impossible, parce qu'on peut aisément prouver que le point d'infini est celui de la singularité essentielle.