PAPERS COMMUNICATED

58. *Bemerkungen über die Frobeniussche Komposition der Charaktere einer endlichen Gruppe.*

Von Kenjiro SHODA.

(Rec. April 30, 1930. Comm. by TAKAGI, M.I.A., May 12, 1930.)

Um die Berechnung der Charaktere einer Gruppe zu erleichtern, hat Frobenius[1] zwei Methoden angegeben. Es dürfte nicht ohne Interesse sein zu bemerken, daß man die in F. II. § 1 befindlichen Formeln leicht aus denen in F. I. § 1 ableiten kann. Damit wird also gezeigt, daß F. II. als eine Anwendung von F. I. anzusehen ist. Nach dieser Überlegung kann man die Formeln in F. II. etwas verallgemeinern und einige neue Formeln erhalten.

Wir betrachten das direkte Produkt von zueinander isomorphen Gruppen:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots\ldots \times \mathfrak{G}_m .$$

Die Produkte der entsprechenden Elemente aus $\mathfrak{G}_i$ bilden ersichtlich eine zu $\mathfrak{G}_i$ isomorphe Gruppe, die mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet sei.

Jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{H}$ ist das Kroneckersche Produkt der irreduziblen Darstellungen der Faktoren $\mathfrak{G}_i$ und umgekehrt.[2] Da $\mathfrak{G}_i$ zu $\mathfrak{G}$ isomorph ist, so ist der Charakter von $\mathfrak{H}$

$$\chi^{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_m}(P) = \psi^{\lambda_1}(P)\psi^{\lambda_2}(P)\ldots\ldots\psi^{\lambda_m}(P) ,$$

wo P ein Element aus $\mathfrak{G}$ und $\psi^{\lambda_i}(P)$ ein Charakter von $\mathfrak{G}$ ist.

Nach F. I. (3) gibt es ein System von nichtnegativen ganzen Zahlen $f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_m\varkappa}$, so daß

$$\chi^{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_m}(P) = \sum_{\varkappa} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_m\varkappa}\psi^{\varkappa'}(P) \qquad \text{(F. II. 2)},$$

wo $\psi^{\varkappa'}(P)$ den konjugiert komplexen Charakter von $\psi^{\varkappa}(P)$ bedeutet, also

$$\psi^{\varkappa'}(P) = \psi^{\varkappa}(P^{-1}) .$$

Setzt man $P=E$ (das Einheitselement) und bezeichnet man den Grad

1) G. Frobenius: Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppe, Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. zu Berlin, 1898; Über die Composition der Charaktere einer Gruppe, ebenda, 1899. Diese beiden Arbeiten werden bzw. mit F. I. und F. II. zitiert.

2) K. Shoda: Über direkt zerlegbare Gruppen, zu erscheinen in J. Fac. Sci., Tokyo, (Sect. I) Vol. 2.

des Charakters $\psi^{\lambda_i}(P)$ mit f_{λ_i}, so erhält man

$$f_{\lambda_1} f_{\lambda_2} \cdots\cdots f_{\lambda_m} \sum_{\chi} f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_m \chi} f_{\chi} \qquad \text{(F. II. 7).}$$

Es gilt nun nach F. I. (4), wenn g die Ordnung von $\mathfrak{G}$ bedeutet,

$$g f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_m \chi} = \sum_P \psi^{\chi}(P) \chi^{\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_m}(P)$$

$$= \sum_P \psi^{\chi}(P) \psi^{\lambda_1}(P) \psi^{\lambda_2}(P) \cdots\cdots \psi^{\lambda_m}(P) \qquad \text{(F. II. 10).}$$

Hieraus folgt leicht[1)]

$$\sum_P f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_m \chi} f_{\chi' \lambda_{m+1} \lambda_{m+2} \cdots\cdots \lambda_{m+n} \mu} = f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_{m+n} \mu} \qquad \text{(F. II. 9).}$$

Nach F. I. (14) ist nun

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m, \chi} f^2_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_m \chi} = \sum_{\rho} \frac{h g_{\rho}}{g h_{\rho}},$$

wo h die Ordnung von $\mathfrak{H}$, h_ρ bzw. g_ρ die Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}$ in der ρ-ten konjugierten Klasse von $\mathfrak{H}$ bedeutet. Jede konjugierte Klasse von $\mathfrak{H}$ ist das Produkt der von $\mathfrak{G}_i$, $i=1, 2, \cdots\cdots, m$. Aus der isomorphen Zuordnung zwischen den Elementen aus $\mathfrak{G}_i$ folgt natürich eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Klassen von $\mathfrak{G}_i$. Daraus folgt, daß $h_\rho = g_\rho^m$ ist, falls g_ρ von Null verschieden ist. Da $h = g^m$ ist, so gilt

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m, \chi} f^2_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_m \chi} = \sum_{\rho} \left(\frac{g}{g_\rho}\right)^{m-1} \qquad \text{(F. II. 13).}$$

Diese Gleichung gilt auch für $m=1$, wenn man $f_{\lambda\chi}$ analog durch

$$g f_{\lambda\chi} = \sum_P \psi^{\chi}(P) \psi^{\lambda}(P) \qquad \text{(F. II. 3)}$$

definiert.

Die anderen Formeln in F. II. §1 kann man auch ohne Mühe aus denen in F. I. §1 ableiten.

Wir betrachten nun F. I. (5);

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m} f_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_m \chi'} \chi^{\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_m}(R) = \frac{h}{g h_\rho} \sum_{(\rho)} \psi^{\chi}(P),$$

wo R und P Elemente der ρ-ten Klasse von $\mathfrak{H}$ sind und P die Elemente der ρ-ten Klasse durchläuft, die in $\mathfrak{G}$ enthalten sind. Bei unserem Fall ist aber jede Klasse von $\mathfrak{G}$ in einer Klasse von $\mathfrak{H}$ enthalten. Daher ist

1) In F. II. hat Frobenius diese Gleichung für die Definition von f mit mehreren Indizes benützt.

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_m\varkappa'}\psi^{\lambda_1}(P)\psi^{\lambda_2}(P)\ldots\ldots\psi^{\lambda_m}(P)=\left(\frac{g}{g_P}\right)^{m-1}\psi^{\varkappa}(P).$$

Für $\varkappa=\varkappa'=0$, d.h. falls $\psi^{\varkappa}(P)$ der Hauptcharakter von $\mathfrak{G}$ ist, gilt also

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_m}\psi^{\lambda_1}(P)\psi^{\lambda_2}(P)\ldots\ldots\psi^{\lambda_m}(P)=\left(\frac{g}{g_P}\right)^{m-1}.$$

Dies folgt auch aus F. I. (9) unmittelbar.

Setzt man nun wieder $P=E$, so erhält man

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_m\varkappa} f_{\lambda_1} f_{\lambda_2}\cdots\cdots f_{\lambda_m}=g^{m-1}f_{\varkappa},$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\ldots\lambda_m} f_{\lambda_1} f_{\lambda_2}\cdots\cdots f_{\lambda_m}=g^{m-1}.$$