PAPERS COMMUNICATED

66. *Gruppentheoretischer Beweis des Äquivalenz- und Enthaltenseinsatzes in der Theorie der Matrizen mit ganzen Koeffizienten.*

Von Kenjiro SHODA.

(Rec. and Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1930.)

Die Beziehung zwischen den Abelschen Gruppen und den ganzzahligen Matrizen haben zuerst Frobenius und Stickelberger[1] entdeckt. In der vorliegenden Arbeit werde ich diese Beziehung zum Beweis des bekannten Aquivalenz- und Enthaltenseinsatzes von Frobenius[2] anwenden. Wenn man statt Abelsche Gruppen die Krullschen Elementarteilergruppen[3] betrachtet, so erhält man ganz analog die Beweise der beiden Fundamentalsätze über Matrizen, deren Koeffizienten Polynome einer Verändlichen in einem beliebigen Körper sind.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine unendliche Abelsche Gruppe, die durch endlich viele Elemente erzeugt wird. Dann ist $\mathfrak{A}$ nach Herrn A. Prüfer[4] das direkte Produkt einer endlichen Gruppe $\mathfrak{A}_e$ und einer reinen unendlichen Gruppe $\mathfrak{A}_u$. Unter die Invarianten von $\mathfrak{A}$ verstehen wir $(a_1, a_2, \dots\dots, a_k, 0, 0, \dots\dots, 0)$, wenn $(a_1, a_2, \dots\dots, a_k)$ die Invarianten von $\mathfrak{A}_e$ ist.

Sind A, B zwei ganzzahlige Matrizen und gibt es zwei quadratische ganzzahlige Matrizen P, Q, die der Gleichung $PAQ=B$ genügen, so heisst A unter B *enthalten*. Zwei gegenseitig unter der anderen ethaltene Matrizen heissen miteinander *äquivalent*. Der Frobeniussche Äquivalenzsatz lautet: *Zwei ganzzahlige Matrizen von demselben Typus sind dann und nur dann miteinander äquivalent, wenn sie dieselben Elementarteiler besitzen.*

Ist nun $PAQ=B$, so ist jede λ-ten Unterdeterminante von B eine lineare Funktion der von A, also ist der grösste gemeinsamer Teiler

---

1) Frobenius-Stickelberger: Über Gruppen mit vertauschbaren Elementen, Crelle's Journal, 86.

2) Frobenius: Theorie der linearen Formen mit ganzen Koeffizienten, Crelle's Journal, 86 und 88.

3) Krull: Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. der Wiss. 1926. Wenn man dabei die Existenz des Ordnungspolynoms nicht voraussetzt, so erhält man die Definition der unendlichen Elementarteilergruppe.

4) Prüfer: Theorie der Abelschen Gruppen, Math. Zeitschr. 20.

aller λ-ten Unterdeterminaten von B auch ein gemeinsamer Teiler aller λ-ten Unterdeterminanten von A. Ist A mit B äquivalent, so folgt hieraus, daß die Elementarteiler von A und B übereinstimmen. Also ist unsere Bedingung notwendig.

Wir beweisen nun, daß unsere Bedingung auch hinreichend ist. Ist A eine ganzzahlige Matrix mit n Zeilen und m Spalten, so betrachten wir eine additiv geschriebene Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$, die durch m Elemente r_1', r_2', ..., r_m' erzeugt wird, wo die erzeugenden Elemente r_i' durch die Bedingung $AS_{r'}=0$ definiert werden. Dabei bedeutet $S_{r'}$ eine einspaltige Matrix mit Koeffizienten r_1', r_2', ..., r_m'. Da die Anzahl der Prüferschen normalen Basiselemente von $\mathfrak{A}$ kleiner oder gleich m ist, so nehmen wir durch Hinzufügung des Einheitselementes an, daß r_1, r_2, ..., r_m die Prüfersche Basis bilden, die also durch $FS_r=0$ definiert wird. Dabei bedeutet F eine diagonale Matrix mit n Zeilen und m Spalten, deren Koeffizienten die Invarianten von A und 1 sind.

Es ist jetzt klar, daß es eine ganzzahlige Matrix Q des Grades m gibt, so daß $S_{r'}=QS_r$ wird. Man kann ferner die Basis S_r stets so annehmen, daß Q unimodular ist. Es ist nun $AQS_r=0$, $FQ^{-1}S_{r'}=0$. Da S_r bzw. $S_{r'}$ durch $FS_r=0$ bzw. $AS_{r'}=0$ definiert wird, so gibt es eine ganzzahlige Matrix P, so daß $PF=AQ$ bzw. $FQ^{-1}=PA$, also $PFQ^{-1}=A$ bzw. $F=PAQ$. Daher sind A und F miteinander äquivalent. Hiernach erkennt man leicht, daß unsere Bedingung auch hinreichend ist.

Nach der Gestalt der Matrix sieht man leicht, daß man P als unimodular annehmen kann.

Bedeutet nun Z_s eine einzeilige Matrix mit Koeffizienten s_1, s_2, ..., s_n, so kann man durch $Z_sA=0$ auch eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}'$ definieren. Wenn man A in die diagonale Normalform transformiert, so sieht man leicht, daß $\mathfrak{A}_e=\mathfrak{A}_e'$ ist.

Wir sind jetzt in der Lage den Frobeniusschen Enthaltenseinsatz zu beweisen, der lautet: *Eine Matrix B ist dann und nur dann unter einer anderen A enthalten, wenn der Rang von B kleiner oder gleich dem von A und der λ-ten Elementarteiler von B durch den λ-ten Elementarteiler von A teilbar ist.*

Wenn man A und B in die Normalformen transformiert, so erkennt man, daß unsere Bedingung hinreichend ist.

Wir beweisen jetzt, daß sie auch notwending ist. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $n\geqq m$ ist. Es sei nun $PAQ=B$. Man setze $PA=\overline{B}$. Ist $\mathfrak{A}$ durch $AS_r=0$ definiert, so ist ersichtlich $PAS_r=0$. Also ist $\mathfrak{A}$ der durch $\overline{B}S_r=0$ definierten Gruppe $\overline{\mathfrak{B}}$ homomorph. Ist $\overline{\mathfrak{B}}'$ bzw. $\mathfrak{B}'$ eine Gruppe, die durch $Z_s\overline{B}=0$ bzw. $Z_sB=0$ definiert wird, so kann man ganz analog beweisen, daß $\overline{\mathfrak{B}}'$ zu $\mathfrak{B}'$ homomorph ist.

Da $n \geqq m$ ist, so ist $\overline{\mathfrak{B}}'$ bzw. $\mathfrak{B}'$ dem direkten Produkt von $\overline{\mathfrak{B}}$ bzw. $\mathfrak{B}$ und einer reinen unendlichen Gruppe mit n-m Basiselementen isomorph. Daraus folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ homomorph ist. D.h. die Invarianten von $\mathfrak{B}$ sind durch die Invarianten von $\mathfrak{A}$ teilbar; oder anderes gesagt, der Rang von B ist nicht grösser als der von A und der λ-ten Elementarteiler von B ist durch den von A teilbar. Damit ist der Enthaltenseinsatz bewiesen.

Wenn man die auftretenden Matrizen modulo einer ganzen Zahl betrachtet, so kann man ganz analog vorgehen und die Frobeniussche Sätze über die relative Aquivalenz und das relative Enthaltensein erhalten. Dabei ist es genügend endliche Abelsche Gruppen zu betrachten.