PAPERS COMMUNICATED

32. Über den Konvergenzradius der Lösungen eines Differentialgleichungssystems.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., April 12, 1932.)

Der Satz 1 in meiner früheren Arbeit[1] kann nicht ohne weiteres auf das System der Differentialgleichungen erweitert werden. Aber man kann unter einigen Beschränkungen auf das System wie folgt erweitern.

Unter

$$f_i(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

verstehen wir die im Zylinderbereich $|x|<a$, $|y_i|<b_i$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ regulären Funktionen der komplexen Veränderlichen x und $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$. Die den Anfangspunkt $(o, o, \ldots\ldots, o)$ durchgehenden Lösungen von

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

bezeichnen wir mit

$$y_i=\varphi_i(x) \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n),$$

und den kleinsten ihrer Konvergenzradien mit r.

Satz.

$$F_i(s, t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n) \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

seien für $o\leqq s<a$, $o\leqq t_i<b_i$, $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ *positive und der Lipschitzschen Bedingung genügende und noch weiter nach* t_i $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ *monoton wachsende Functionen.*

Wenn für $|x|<a$, $|y_i|<b_i$

$$|f_i(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)|\leqq F_i(|x|, |y_1|, |y_2|, \ldots\ldots, |y_n|) \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

sind, so gilt es

$$r\geqq \mathrm{Min}\,[a, \Phi_1^{-1}(b_1), \Phi_2^{-1}(b_2), \ldots\ldots, \Phi_n^{-1}(b_n)],$$

wobei $\Phi_i^{-1}(t)$ *die inverse Funktion der den Anfangspunkt durchgehenden Lösung* $t_i=\Phi_i(s)$ *von dem Differentialgleichungssysteme*

1) Proc. 8 (1932), 29.

$$\frac{dt_i}{ds}=F_i(s,\ t_1,\ t_2,\ \ldots\ldots,\ t_n) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$$

ist.

Beweis. Man braucht offenbar nur den Fall $r<a$ zu betrachten. Wie beim Beweise des Satzes 1 der genannten Arbeit kann man leicht beweisen, dass für mindestens einen Wert von $i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$ die Relation

$$\underset{|x|<r}{\operatorname{Max}}\,|\varphi_i(x)|\geqq b_i$$

besteht.

Es genügt nur den Fall

$$|f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_n)|<F_i(|x|,\ |y_1|,\ \ldots\ldots,\ |y_n|) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$$

zu beweisen, denn sonst betrachten wir die Funktionen

$$F_i(|x|,\ |y_1|,\ |y_2|,\ \ldots\ldots,\ |y_n|)+\varepsilon \qquad (\varepsilon>o)$$

statt $F_i(|x|,\ |y_1|,\ \ldots\ldots,\ |y_n|)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$ und lassen ε nach Null streben. Wenn man sich auf dem Radius $|x|e^{i\vartheta}$ beschränkt, so besitzt $|\varphi_i(x)|$ die stetige Ableitung nach $|x|$, bis auf höchstens abzählbar viele Werte von ϑ, und gilt

$$\begin{aligned}\frac{d|\varphi_i(x)|}{d|x|}\leqq\left|\frac{d\varphi_i(x)}{dx}\right|&=|f_i(x,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ldots,\ \varphi_n(x))|\\&<F_i(|x|,\ |\varphi_1(x)|,\ |\varphi_2(x)|,\ \ldots\ldots,\ |\varphi_n(x)|)\\&\qquad\qquad\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)\,.\end{aligned}$$

Daher besteht $|\varphi_i(x)|\leqq\Phi_i(|x|)$ für $|x|<r$ $(i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$. Denn, sonst, gäbe es einen Punkt $|x_0|<r$, so dass $|\varphi_i(x)|\leqq\Phi_i(|x|)$ für $o\leqq|x|\leqq|x_0|$ sind, und für mindestens einen Wert von $i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$, zum Beispiel für $i=1$, $|\varphi_1(x_0)|=\Phi_1(|x_0|)$ ist, weil $\varphi_i(o)=\Phi_i(o)$ und $\left[\frac{d|\varphi_i(x)|}{d|x|}\right]_{x=0}<\left[\frac{d\Phi_i(|x|)}{d|x|}\right]_{x=0}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$ sind. Daher müsste

$$\frac{d|\varphi_1(x_0)|}{d|x|}\geqq\frac{d\Phi_1(|x_0|)}{d|x|}$$

sein. Andererseits, wegen $|\varphi_i(x_0)|\leqq\Phi_i(|x_0|)$, bestehen die Relationen,

$$\begin{aligned}\frac{d|\varphi_1(x_0)|}{d|x|}&<F_1(|x_0|,\ |\varphi_1(x_0)|,\ \ldots\ldots,\ |\varphi_n(x)|)\\&\leqq F_1(|x_0|,\ \Phi_1(|x_0|),\ \ldots\ldots,\ \Phi_n(|x_0|))\,.\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \frac{d|\varphi_1(x_0)|}{d|x|}<\frac{d\Phi_1(|x_0|)}{d|x|}\,,$$

was der obigen Ungleichung widerspricht.

Da $\Phi_i(s)$ stets wachsende Funktionen sind, haben wir

$$|\varphi_i(x)| \leqq \Phi_i(r) \quad \text{für} \quad |x| < r .$$

Daher für mindestens einen Wert von $i=1, 2, \ldots\ldots, n$ besteht die Ungleichung

$$b_i \leqq \Phi_i(r) ,$$

nämlich

$$\Phi_i^{-1}(b_i) \leqq r ,$$

was zu beweisen war.

Bemerkung. 1. Von dem obigen Satze kann man alle bisher bekannten Formeln für Konvergenzradius ableiten.

Bemerkung. 2.[1] Aus dem Beweis kann man leicht einsehen, dass der obige Satz noch gilt, wenn $F_i(s, t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n)$ nur für t_j $(j \neq i)$ monoton wachsend sind.

---

1) Diese Bemerkung ist es Herrn Nagumo zu verdanken.