PAPERS COMMUNICATED

1. Über die Koeffizientenabschätzungen von ungeraden schlichten Potenzreihen.

Von Shin-ichi TAKAHASHI.
Shiomi-Institut für Phys. und Chem. Forschung, Osaka.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Jan. 12, 1933.)

Es sei

$$f(z)=z+a_3z^3+a_5z^5+\cdots\cdots$$

eine reguläre und ungerade schlichte Funktion für $|z|<1$; kürzlich haben Herren Littlewood und Paley gezeigt,[1] dass die sämtliche Koeffizienten von $f(z)$ beschränkt sind. Für eine Potenzreihe mit durchweg reellen Koeffizienten hat Herr Rogosinski bewiesen,[2] dass

$$\text{(A)} \qquad |a_{2p+1}|\leqq 2, \quad p=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$$

und ferner hat Herr Dieudonné die wesentlich verschärfte Form der Ungleichung (A), d. h.

$$\text{(B)} \qquad |a_{2p-1}|+|a_{2p+1}|\leqq 2, \quad p=1,\ 2,\cdots\cdots$$

angegeben.[3] Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur für die Funktion

$$f(z)=\frac{z}{1-z^2}.$$

Nun möchte ich hier einen anderen Beweis für (B) geben, und zwar unter Benutzung von den Fourierformeln.

Setzt man

$$\varphi(r,\ \theta)=\frac{f(re^{i\theta})-f(re^{-i\theta})}{r(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}=\sum_{p=0}^{\infty}a_{2p+1}r^{2p}\frac{\sin(2p+1)\theta}{\sin\theta},$$

$$\psi(r,\ \theta)=\frac{f(re^{i\theta})-f(-re^{-i\theta})}{r[re^{i\theta}-(-re^{-i\theta})]}=\frac{f(re^{i\theta})+f(re^{-i\theta})}{r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}a_{2p+1}r^{2p}\frac{\cos(2p+1)\theta}{\cos\theta}$$

so ist nach Voraussetzung

---

1) The Journal of the London Math. Soc., **7** (1932), 167–169.
2) Math. Zeits., **35** (1932), 93–121.
3) Annales de l'École Normale Supérieure, 3 série, **48** (1931), 307–321.

$$\psi(r,\ \theta)\neq 0,\ \psi(r,\ \theta)\neq 0 \text{ für } 0\leqq r<1,\ 0<\theta<\pi$$

und

$$\varphi(0,\ \theta)=\psi(0,\ \theta)=1>0\,,$$

also

$$\varphi(r,\ \theta)>0,\ \psi(r,\ \theta)>0 \text{ für } 0\leqq r<1,\ 0<\theta<\pi\,.$$

Nun ist offenbar

$$a_{2p+1}=\frac{2}{\pi r^{2p}}\int_0^\pi \varphi(r,\ \theta)\sin(2p+1)\theta\sin\theta d\theta\,,$$

$$a_{2p+1}=\frac{2}{\pi r^{2p}}\int_0^\pi \psi(r,\ \theta)\cos(2p+1)\theta\cos\theta d\theta\,;$$

also einerseits

(1) $$|\, r^{2p}a_{2p+1}-r^{2(p-1)}a_{2p-1}\,|$$
$$\leqq\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(r,\ \theta)\,|\sin(2p+1)\theta-\sin(2p-1)\theta\,|\sin\theta d\theta$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\varphi(r,\ \theta)\,|\cos 2p\theta\,|\sin^2\theta d\theta$$
$$\leqq\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\varphi(r,\ \theta)\sin^2\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\sin^2\theta d\theta=2\,,$$

und andererseits

(2) $$|\, r^{2p}a_{2p+1}+r^{2(p-1)}a_{2p-1}\,|$$
$$\leqq\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(r,\ \theta)\,|\cos(2p+1)\theta+\cos(2p-1)\theta\,|\ |\cos\theta\,|\,d\theta$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\psi(r,\ \theta)\,|\cos 2p\theta\,|\cos^2\theta d\theta$$
$$\leqq\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\psi(r,\ \theta)\cos^2\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\cos^2\theta d\theta=2\,.$$

Aus (1) und (2) folgt für $r\to 1$ unmittelbar

$$|\, a_{2p-1}\pm a_{2p+1}\,|\leqq 2\,,$$

d. h. $$|\, a_{2p-1}\,|+|\, a_{2p+1}\,|\leqq 2\,,$$ w. z. b. w.