59. *Eine Bemerkung über die Einheiten im Kreiskörper.*

Von Mikao MORIYA.
Z. Zt. in Marburg (Deutschland).

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1933.)

Prof. Takagi[1] hat den folgenden Satz bewiesen:

Es sei K_1 irregulärer Kreiskörper von l-ten Einheitswurzeln und k_1 sein reeller Teilkörper vom $\frac{l-1}{2}$-ten Grade, wobei l ungerade Primzahl bedeutet. Wenn die Klassenzahl von k_1 zu l prim ist, dann sind alle singulären Primärzahlen von K_1 durch die Einheiten gegeben.

In der vorliegenden Arbeit verallgemeinere ich den obigen Satz folgendermassen:

Es sei K_m irregulärer[2] *Kreiskörper von l^m-ten Einheitswurzeln und k_m sein reeller Teilkörper vom $\frac{\varphi(l^m)}{2}$-ten Grade, wobei l ungerade Primzahl, m positive ganze rationale Zahl, und $\varphi(l^m)$ die Eulersche Funktion ist. Wenn die Klassenzahl von k_1 zu l prim ist, dann sind alle singulären Primärzahlen von K_m durch die Einheiten von k_m gegeben.*

Um den Satz zu beweisen, schicke ich zwei Hilfssätze voraus. Im folgenden bezeichne ich mit r eine primitive Zahl nach l^m und mit $s=(\zeta_m \rightarrow \zeta_m^r)$ einen erzeugenden Automorphismus von K_m nach dem rationalen Zahlkörper, der eine primitive Einheitswurzel ζ_m in ζ_m^r transformiert.

Hilfssatz 1. *Es sei μ eine Zahl aus K_m, e der kleinste positive Exponent, von der Art, dass μ^{s^e-a} bei geeignetem a die l-te Potenz einer Zahl von K_m wird.*[3] *Dann ist der Körper $K=K_m(\sqrt[l]{\mu})$ relativ galoissch in bezug auf den Teilkörper e-ten Grades von K_m; dann und nur dann ist er relativ abelsch in bezug auf diesen Teilkörper, wenn $a\equiv r^e \bmod l$ ist.*

---

1) T. Takagi: Zur Theorie des Kreiskörpers. Journ. f. Math. **157** (1927). Ich zitiere diese Arbeit mit *T*.

2) Ich brauche hier das Wort „irregulär" im verallgemeinerten Sinne, d.h. wenn die Klassenzahl von K_m durch l teilbar ist, so heisst K_m irregulär.

3) Der triviale Fall, dass μ l-te Potenz einer Zahl aus K_m ist, sei ausgeschlossen.

Beweis. Wir bezeichnen den in Hilfssatz genannten Teilkörper vom Grade e mit k. Dann genügt μ einer irreduziblen Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^{\varphi(l^m)} (x^l - \mu^{s^{\nu e}}) = 0$$

in k. Denn diese Gleichung hat offenbar die Koeffizienten aus k und ihr Grad über k ist gleich dem Körpergrad von K über k.

K ist galoissch in bezug auf k. Denn eine beliebige konjugierte Wurzel $\zeta_1^{\alpha_\nu}\sqrt[l]{\mu^{s^{\nu e}}}$ von $\sqrt[l]{\mu}$ ist eine Zahl von K, weil $\mu^{s^e - a}$ l-te Potenz einer Zahl aus K_m ist.

Den letzten Teil des Satzes kann man wie folgt beweisen.[1] Nach einem Satz von Herrn Hasse[2] ist K/k dann und nur dann abelsch, wenn jede Klasse nach der K zugeordneten Idealgruppe aus K_m bei s^e invariant ist, oder ausgedrükt durch das Artinsche Symbol, wenn

$$\left(\frac{K/K_m}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K/K_m}{\mathfrak{p}^{s^e}}\right)$$

ist, für ein beliebiges zur Relativdiskriminante von K/K_m primes Primideal $\mathfrak{p}$ aus K_m.

Da K über k galoissch und $s^e K_m = K_m$ ist, so ist

$$\left(\frac{K/K_m}{\mathfrak{p}^{s^e}}\right) = \left(\frac{s^e K/s^e K_m}{\mathfrak{p}^{s^e}}\right) = s^e \left(\frac{K/K_m}{\mathfrak{p}}\right) s^{-e},$$

wobei s^e als einer von denjenigen Automorphismen von K/k betrachtet werden soll, die auf ζ_1 angewandt ζ_1 in $\zeta_1^{r^e}$ transformieren. Da $\sqrt[l]{\mu}$ durch s^e in eine andere Wurzel übergeht, so kann man leicht einsehen, dass

$$s^e \sqrt[l]{\mu} = \zeta_1^x \sqrt[l]{\mu^{s^e}}$$

ist. Und ferner erhält man aus $\sqrt[l]{\mu} = s^{-e} s^e \sqrt[l]{\mu} = \zeta_1^{xr^{-e}} s^{-e} \sqrt[l]{\mu^{s^e}}$

$$s^{-e} \sqrt[l]{\mu^{s^e}} = \zeta_1^{-xr^e} \sqrt[l]{\mu}\,.$$

Nun setze ich nach der Voraussetzung $\sqrt[l]{\mu^{s^e}} = \xi \sqrt[l]{\mu^a}$, wobei ξ eine Zahl aus K_m ist, $\left(\frac{K/K_m}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma^b$ und $\sigma = (\sqrt[l]{\mu} \rightarrow \zeta_1 \sqrt[l]{\mu})$ d.h. σ transformiert $\sqrt[l]{\mu}$ in $\zeta_1 \sqrt[l]{\mu}$.

---

1) Diesen Beweis verdanke ich Herrn Iyanaga.

2) H. Hasse: Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil II (1930). S. 6 und 24.

$$s^{-e}\sigma^b s^e(\sqrt[l]{\mu})=s^{-e}\sigma^b(\zeta_1^x\sqrt[l]{\mu^{s^e}})=s^{-e}\sigma^b(\zeta_1^x\xi\sqrt[l]{\mu^a})=s^{-e}(\zeta_1^x\xi\zeta_1^{ab}\sqrt[l]{\mu^a})$$
$$=s^{-e}(\zeta_1^{x+ab}\sqrt[l]{\mu^{s^e}})=\zeta_1^{abr^{-e}}\sqrt[l]{\mu}\,.$$

Wenn für $b=0, 1, \ldots\ldots, l-1$ $s^e\sigma^b s^{-e}\sigma^b$ d.h. $s^{-e}\sigma^b s^e=\sigma^b$ sind, dann werden aus der obigen Gleichung $\zeta^{abr^{-e}}=\zeta^b$ für $b=0, 1, \ldots\ldots, l-1$. Also ist

$$a\equiv r^e \bmod l\,.$$

Da im Falle $a\equiv r^e \bmod l$, $s^{-e}\sigma^b s^e\zeta_1=\sigma^b\zeta_1$ und $s^{-e}\sigma^b s^e\sqrt[l]{\mu}=\sigma^b\sqrt[l]{\mu}$ $(b=0, 1, \ldots\ldots, b-1)$ sind, so ist

$$s^{-e}\sigma^b s^e f(\zeta_1, \sqrt[l]{\mu})=\sigma^b f(\zeta_1, \sqrt[l]{\mu})\,,$$

wobei $f(\zeta_1, \sqrt[l]{\mu})$ eine rationale Funktion von ζ_1 und $\sqrt[l]{\mu}$ mit ganz rationalen Koeffizienten. Da alle Zahlen aus K als eine rationale Funktionen von ζ_1 und $\sqrt[l]{\mu}$ mit den Koeffizienten aus dem rationalen Zahlkörper darstellbar sind, so sind beide Automorphismen $s^{-e}\sigma^b s^e$ und σ^b gleich, d.z.

$$s^e\sigma^b s^{-e}=\sigma^b \qquad (b=0, 1, \ldots\ldots, l-1)\,.$$

Damit ist der letzte Teil bewiesen.

Hilfssatz 2. *Wenn die Klassenzahl von k_1 zu l prim ist, dann ist es auch die von k_m $(m=1, 2, \ldots\ldots)$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass dieser Satz bis $m-1$ bewiesen ist. Da die Relativdiskriminante von k_m/k_{m-1} einen einzigen Primteiler enthält und k_m zyklisch und vom Grade l über k_{m-1} ist, so ist die Anzahl der ambigen Idealklassen von k_m/k_{m-1}

$$a=h_{m-1}l^{1+q^*-(r+1)}\,.$$

Dabei bedeutet h_{m-1} die Klassenzahl von k_{m-1}, q^* ist durch $(\eta^* : \varepsilon^l)=l^{q^*}$ definiert, wobei η^* zugleich Einheiten von k_{m-1} und Relativnormen der Zahlen aus k_m nach k_{m-1} sind, ε sind Einheiten von k_{m-1} und r ist die Anzahl der Grundeinheiten von k_{m-1}. Da h_{m-1} zu l prim und ganze rationale Zahl ist, so ist auch a zu l prim.

Weil die Klassenzahl der ambigen Idealklassen zu l prim ist, so auch die Klassenzahl des Körpers selbst.[1]

Beweis des Hauptsatzes.[2] Es sei eine Zahl ω l-te Idealpotenz. Dann folgt nach der Voraussetzung $\omega\bar{\omega}=\varepsilon\alpha^l$, wo $\bar{\omega}$ die zu ω konjugierte komplexe Zahl, ε eine reelle Einheit und α eine Zahl aus k_m bedeutet,

---

1) M. Moriya: Ueber die Klassenzahl eines relativ-zyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrad, diese Proc. **6** (1930).

2) Siehe *T.* S. 235.

weil nach Hilfssatz 2 die Klassenzahl von k_m zu l prim ist. Aus $\omega\bar{\omega}=\varepsilon\alpha^l$ folgt die Gleichung:

$$(\omega\varepsilon^{-\frac{l+1}{2}})(\overline{\omega\varepsilon}^{-\frac{l+1}{2}})=\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^l.$$

Nach Hilfssatz 1 ist $K(\sqrt[l]{\omega\varepsilon^{-\frac{l+1}{2}}})$ abelsch über k_m. Da h_m zu l prim ist, und folglich kein unverzweigter zyklischer Körper vom Grade l über k_m existiert, so kann $\omega\varepsilon^{-\frac{l+1}{2}}$ keine primäre (nicht triviale) Zahl sein. Wenn ω singuläre Primärzahl ist, dann ist ε auch singulär, muss also $\omega\varepsilon^{-\frac{l+1}{2}}$ l-te Potenz einer Zahl aus K_m sein. Damit ist der Satz bewiesen.