103. *Zur Grundlage der Lieschen Differential-kugelgeometrie, II.*

Von Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 12, 1933.)

2. Grundprinzip. *In der Theorie der allgemeinen Scharen von orientierten Kugeln im Lieschen Raume gilt im kleinen bis zur vierten Ordnung (in $\mathfrak{x}(\mathfrak{y})$) in Bezug auf den anschmiegenden*

konformen Raume $\mathfrak{Y}$ *die dual-konform-*	*dualkonformen Raum* $\mathfrak{X}$ *die konform-*

geometrische Kugelscharentheorie,[1] *so dass wir die genannte Theorie ganz parallel zur N.E. Kurventheorie entwickeln können.*

3. Eine Verallgemeinerung. *Ersetzt man den anschmiegenden*

dualkonformen Raum $\mathfrak{X}$	*konformen Raum* $\mathfrak{Y}$

durch den Komplex

$\mathfrak{X}^*=\cos\phi(\sigma)\mathfrak{X}+\sin\phi(\sigma)\mathfrak{Z}$,	$\mathfrak{Y}^*=\cos\psi(s)\mathfrak{Y}+\sin\psi(s)\mathfrak{W}$,

so werden alle in (17) *auftretenden Grössen und Vektoren (bis auf den Ausgangsvektor*

$\mathfrak{x}$, *Normierung ausgeschlossen)*	$\mathfrak{y}$, *Normierung ausgeschlossen)*

verallgemeinert, die Gestalten der Formeln (17) *sind aber dabei beibehalten.*

4. Das die bisherige Theorie eine Verallgemeinerung meiner Kugelscharentheorie im konformen und dualkonformen Raume ist. Adjungiert man den Komplex

$\mathfrak{X}=0, 0, 0, 0, 1, 0,$	$\mathfrak{Y}=0, 0, 0, 0, 0, 1,$

so folgt aus $(17)_6$ im Sinne des Art. 3:

$\mu=\text{konst.}\left(=\text{etwa } \frac{1}{k}\right)$,	$\nu=\text{konst.}\ (=\text{etwa } 1)$,

und es entsteht die allgemeine Kugelscharentheorie im

dualkonformen Raume.	konformen Raume (a. a. O.).

1) Ibid.

5. Dass die bisherige Theorie eine Verallgemeinerung meiner Kugelscharentheorie im Laugerreschen[1] und dual-Laguerreschen Raume ist. Adjungiert man die orientierte Kugel

$\mathfrak{X}=0, 0, 0, 0, 1, i,$	$\mathfrak{Y}=0, 0, 0, 0, i, 1,$

so folgt:

$\mu=0$	$\nu=0$

und es entsteht die allgemeine

dual-Laguerresche	Laguerresche

Kugelscharentheorie.

6. Theorie der allgemeinen "Kurven" im Lieschen Raume. Diejenige orientierten Kugeln $\varkappa^{(1)}$, $\varkappa^{(2)}$ des Berührungskugelbüschels $l\xi+m\mathfrak{x}$, wofür

$$(20) \qquad (d\varkappa^{(1)}d\varkappa^{(1)})_6=0\,, \qquad (d\varkappa^{(2)}d\varkappa^{(2)})_6=0$$

ist, wollen wir *die H-Torsionskugeln der H-Streifenschar*[2] $l\xi(\sigma)+m\mathfrak{x}(\sigma)$ nennen. Sie sind:

(21)	$\varkappa^{(1)}=\mathfrak{x}+iT\xi\,,$ $\varkappa^{(2)}=\mathfrak{x}-iT\xi\,,$	$K^{(1)}=\xi+i\tau\mathfrak{x}\,,$ $K^{(2)}=\xi-i\tau\mathfrak{x}\,,$

$$(22) \qquad \tau K^{(1)}=-i\varkappa^{(2)}\,, \qquad \tau K^{(2)}=i\varkappa^{(1)}\,.$$

Wir führen ein paar durch die Formeln

(23) $dq^2=d(T)d\sigma$	$dp^2=d(\tau)ds$

definierte *natürliche invariante Parameter*

q	p

ein.

Diejenige orientierten Kugeln des Kugelbüschels $l\xi+m\mathfrak{x}$, wofür die orientierte Kugel

$\mathfrak{x}(\sigma)$ das H-Bogenelement $ds=dq$	$\xi(s)$ den H-Torsionswinkelelement $d\sigma=dp$

beschreibt, wollen wir die

H-Streifendualhauptkugeln	*H-Streifenhauptkugeln*

nennen. Sie sind:

(24) $\check{\mathfrak{x}}^{(n)}=\varkappa^{(n)}+(-1)^{(n)}\dfrac{dq}{d\sigma}\xi\,,$	$\hat{\xi}^{(n)}=K^{(n)}+(-1)^{n}\dfrac{dp}{ds}\mathfrak{x}\,,$

$$(n=1,\ 2).$$

1) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, XIV, Tôhoku Sci. Rep., Vol. 22 (unter der Presse).

2) "H-" soll "Lie-geometrisch" bedeuten.

Setzt man

$$(23)\quad \frac{dq}{d\sigma}\xi\equiv\check{\xi}\,, \qquad\Bigg|\qquad \frac{dp}{ds}\mathfrak{x}\equiv\hat{\mathfrak{x}}\,,$$

so folgt:

$$(26)\quad dq^2=(d\check{\mathfrak{x}}d\check{\mathfrak{x}})_6=(d\check{\xi}d\check{\xi})_6\,, \qquad\Bigg|\qquad dp^2=(d\hat{\xi}d\hat{\xi})_6=(d\hat{\mathfrak{x}}d\hat{\mathfrak{x}})_6\,,$$

$$(27)\quad T=\frac{dq}{d\sigma}\,. \qquad\Bigg|\qquad \tau=\frac{dp}{ds}\,.$$

In diesem Falle lässt sich beweisen:

$$(28)\quad \frac{1}{T}=-e^{-(q-q_0)}\,, \qquad\Bigg|\qquad \frac{1}{\tau}=-e^{-(p-p_0)}\,,$$

so dass *die zwei Gleichungen*

$$(29)\quad \begin{array}{l} R=R(q)\,, \\ \nu=\nu(q) \end{array} \qquad\Bigg|\qquad \begin{array}{l} P=P(p)\,, \\ \mu=\mu(p) \end{array}$$

als natürliche Gleichungen der " Kurven " brauchbar sind.

N.E. Auf Grund der Prinzipien der Artikel 4 und 5 kann man aus diesem Ergebnis *eine neue Form der konformen und Laguerreschen Kurventheorie* herleiten.