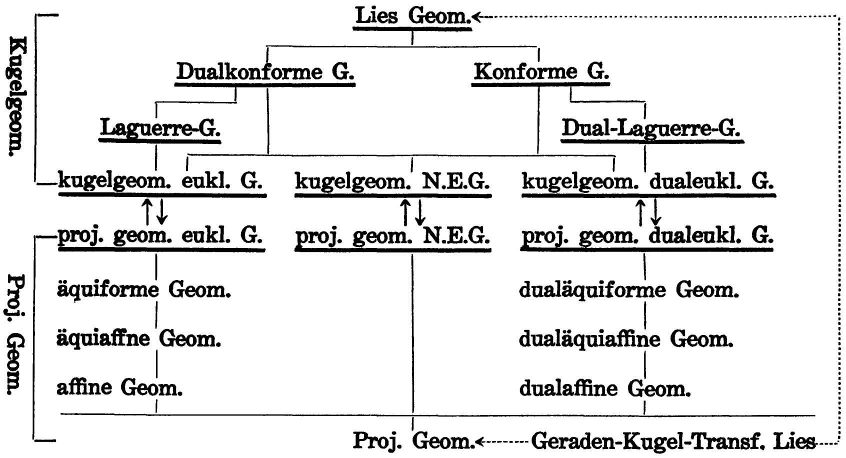
102. *Zur Grundlage der Lieschen Differentialkugelgeometrie, I.*

Von Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 12, 1933.)

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung meiner Abhandlung: Liesche Differentialkugelgeometrie, I[1] und enthält eine Lie-geometrische Verallgemeinerung der Kurventheorie im Raume, die des folgenden Schematas gemäss einheitlich, systematisch und durchsichtlich in der Form behandelt ist, dass sie die entsprechenden Theorien in den Unterstriche gemachten Geometrien als Sonderfälle in sich enthält:



1. Theorie der allgemeinen Scharen orientierter Kugeln im Raume der Lieschen höheren Kugelgeometrie. Wir betrachten ein ein-parametriges System von orientierten Kugeln

(1) $\xi=\xi(\sigma)$, $((\xi\xi)_6=0)$	$\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(s)$, $((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_6=0)$

als Lie-geometrische Verallgemeinerungen der gewöhnlichen

Schmiegungsebenen	Kurvenpunkte

der Raumkurven. Fünf unendlich benachbarte orientierte Kugeln des Systems (1) bestimmen den Kugelkomplex

(2) $\mathfrak{Z}=\dfrac{\Vert \xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi\, d^4\xi \Vert}{\sqrt{\Vert \xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi\, d^4\xi \Vert^2}}$.	$\mathfrak{W}=\dfrac{\Vert \mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}\, d^2\mathfrak{x}\, d^3\mathfrak{x}\, d^4\mathfrak{x} \Vert^2}{\sqrt{\Vert \mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}\, d^2\mathfrak{x}\, d^3\mathfrak{x}\, d^4\mathfrak{x} \Vert^2}}$.

1) Sci. Rep. Tôhoku Imper. Univ., 22 (1933). Das Wesen war bei der Sitzung des Phys.-Math. Soc. Japan am 3. April, 1933 in Sendai vorgetragen.

Wir setzen

(3) $d\mathcal{S}^2=(d\mathfrak{Z}d\mathfrak{Z})_6$,	$d\Sigma^2=(d\mathfrak{W}d\mathfrak{W})_6$,
(4) $d\sigma^2=(d\xi d\bar{\xi})_6$,	$ds^2=(d\mathfrak{x}d\bar{\mathfrak{x}})_6$,
(5) $\mathfrak{X}=\dfrac{d\mathfrak{Z}}{d\mathcal{S}}$.	$\mathfrak{Y}=\dfrac{d\mathfrak{W}}{d\Sigma}$.

Betrachtet man den Komplex

$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{Y}$

als den *anschmiegenden* (d.h. *instantanen*)

dualkonformen Raum,	*konformen Raum,*

so lässt sich beweisen:

(6) $\mathfrak{X}=\dfrac{\Vert\mathfrak{Y}\,d\mathfrak{Y}\,d^2\mathfrak{Y}\,d^3\mathfrak{Y}\,d^4\mathfrak{Y}\Vert}{\sqrt{\Vert\mathfrak{Y}\,d\mathfrak{Y}\,d^2\mathfrak{Y}\,d^3\mathfrak{Y}\,d^4\mathfrak{Y}\Vert^2}}$.	$\mathfrak{Y}=\dfrac{\Vert\mathfrak{X}\,d\mathfrak{X}\,d^2\mathfrak{X}\,d^3\mathfrak{X}\,d^4\mathfrak{X}\Vert}{\sqrt{\Vert\mathfrak{X}\,d\mathfrak{X}\,d^2\mathfrak{X}\,d^3\mathfrak{X}\,d^4\mathfrak{X}\Vert^2}}$.

Wir führen übrigens die Lie-geometrischen Verallgemeinerungen der gewöhnlichen

Dualschmiegungskugeln	Schmiegungskugeln
(7) $\mu\eta=+i\mathfrak{X}-\mathfrak{Z}$,	$\nu y=+i\mathfrak{Y}-\mathfrak{W}$,
$\bar{\mu}\bar{\eta}=-i\mathfrak{X}-\mathfrak{Z}$,	$\bar{\nu}\bar{y}=-i\mathfrak{Y}-\mathfrak{W}$,

mit den Forderungen:

(8) $(\eta\bar{\eta})_6=2k^2$,	$(y\bar{y})=2$,
(9) $(d\eta\bar{\eta})_6\equiv-(\eta d\bar{\eta})_6=0$	$(dy\bar{y})_6\equiv-(yd\bar{y})_6=0$

ein, so dass

(10) $\mu=e^{i(\mathcal{S}-\mathcal{S}_0)}$,	$\nu=e^{i(\Sigma-\Sigma_0)}$,
(11) $\mu\bar{\mu}=k^{-2}$	$\nu\bar{\nu}=1$

wird. Weiter lässt es sich beweisen, dass

μ^2 die Raumkrümmung[1] des konformen Raumes $\mathfrak{Y}$ ist.	*ν^2 die Dualraumkrümmung des dualkonformen Raumes $\mathfrak{X}$ ist.*

Wir können noch beweisen die folgenden Beziehungen:

(12) $\nu\xi=\dfrac{d\mathfrak{Y}}{d\Sigma}+i\mathfrak{Y}$,	$\mu\mathfrak{x}=\dfrac{d\mathfrak{X}}{d\mathcal{S}}+i\mathfrak{X}$,
$\bar{\nu}\bar{\xi}=\dfrac{d\mathfrak{Y}}{d\Sigma}-i\mathfrak{Y}$,	$\bar{\mu}\bar{\mathfrak{x}}=\dfrac{d\mathfrak{X}}{d\mathcal{S}}-i\mathfrak{X}$,

wobei

(13) $(\xi\bar{\xi})_6=2$,	$(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})_6=2k^2$,
(14) $(d\xi\bar{\xi})_6\equiv-(\xi d\bar{\xi})_6=0$	$(d\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})_6\equiv-(\mathfrak{x}d\bar{\mathfrak{x}})_6=0$

1) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, I, Tôhoku Sci. Rep., 18 (1928).

ist. Führen wir den Komplex

(15) $$t=\frac{d\mathfrak{x}}{ds} \qquad\Big|\qquad z=\frac{d\xi}{d\sigma}$$

ein, so ist etwa

(16) $$|\xi\,\mathfrak{x}\,z\,t\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}|=\frac{1}{\mu\nu}\neq 0$$

und es lässt sich beweisen die folgenden *Lie-geometrischen Verallgemeinerungen der*

Dual-Frenetschen Formeln:

(17)
$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\sigma}&=z,\\
\frac{dz}{d\sigma}&=\frac{t}{\mu P}-\nu^2\xi+\nu i\mathfrak{Y},\\
\frac{d\mathfrak{x}}{d\sigma}&=\frac{t}{\tau},\\
\frac{dt}{d\sigma}&=-\frac{\mu^2\mathfrak{x}}{\tau}-\frac{z}{\mu P}+\frac{\mu i}{\tau}\mathfrak{X},\\
\frac{d\mathfrak{Y}}{d\sigma}&=-i\frac{d\nu}{d\sigma}\xi-\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\sigma}\mathfrak{Y},\\
\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}&=-i\frac{d\mu}{d\sigma}\mathfrak{x}-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\sigma}\mathfrak{X}.
\end{aligned}$$

Frenetschen Formeln:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathfrak{x}}{ds}&=t,\\
\frac{dt}{ds}&=\frac{z}{\nu R}-\mu^2\mathfrak{x}+\mu i\mathfrak{X},\\
\frac{d\xi}{ds}&=\frac{z}{T},\\
\frac{dz}{ds}&=-\frac{\nu^2\xi}{T}-\frac{t}{\nu R}+\frac{\nu i}{T}\mathfrak{Y},\\
\frac{d\mathfrak{X}}{ds}&=-i\frac{d\mu}{ds}\mathfrak{x}-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds}\mathfrak{X},\\
\frac{d\mathfrak{Y}}{ds}&=-i\frac{d\nu}{ds}\xi-\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}\mathfrak{Y}.
\end{aligned}$$

Dabei ist im anschmiegenden

dualkonformen Raume $\mathfrak{X}$:

$\frac{1}{R}$ = Dual-K-Krümmung,

$\frac{1}{T}$ = Dual-K-Torsion,

$\frac{1}{P}$ = Dual-K-Dualkrümmung,

$\frac{1}{\tau}$ = Dual-K-Dualtorsion,

ν^2 = Dual-K-Raumkrümmung,

konformen Raume $\mathfrak{Y}$:

$\frac{1}{P}$ = K-Dualkrümmung,

$\frac{1}{\tau}$ = K-Dualtorsion,

$\frac{1}{R}$ = K-Krümmung,

$\frac{1}{T}$ = K-Torsion,

μ^2 = K-Raumkrümmung,

so dass

$\frac{1}{R}$ = Lie-geometrische Verallgemeinerung der (N.E.) Krümmung,

$\frac{1}{T}$ = Lie-geometrische Verallgemeinerung der (N.E.) Torsion,

$\frac{1}{P}$ = Lie-geometrische Verallgemeinerung der (N.E.) Dualkrümmung,

$\frac{1}{\tau}$ = Lie-geometrische Verallgemeinerung der (N.E.) Dualtorsion,

$\mathfrak{x}$ = Lie-geometrische Verallgemeinerung des (N.E.) Kurvenpunktes,

$\mathfrak{z}$ = Lie-geometrische Verallgemeinerung der (N.E.) Schmiegungsebene,

t = Lie-geometrische Verallgemeinerung der (N.E.) Normalebene,

z = Lie-geometrische Verallgemeinerung der (N.E.) rektifizierenden Ebene,

$\mathfrak{X}$ = Lie-geometrische Verallgemeinerung der (N.E.) absoluten Fläche,

$\mathfrak{Y}$ = Lie-geometrische Verallgemeinerung der (N.E.) absoluten Fläche,

$d\sigma$ = Lie-geometrische Verallgemeinerung des (N.E.) Torsionswinkelelementes,

ds = Lie-geometrische Verallgemeinerung des (N.E.) Bogenelementes

ist.

Auf Grund der Formeln (17) lässt sich beweisen, dass *die Gleichungen*

$$
(18)\qquad \begin{array}{l|l}
P=P(\sigma)\,, & R=R(s)\,, \\
\tau=\dfrac{1}{T}=\tau(\sigma)\,, & T=\dfrac{1}{\tau}=T(s)\,, \\
\nu=\nu(\sigma)\,, & \mu=\mu(s)\,, \\
\mu=\mu(\sigma)\,, & \nu=\nu(s)
\end{array}
$$

als natürliche Gleichungen der allgemeinen Scharen der orientierten Kugeln (1) *brauchbar sind, wobei aber*

$$
\begin{array}{l|l}
\nu^2 \text{ mittels } \mu P,\ \dfrac{\mu}{\tau}=\mu T & \mu^2 \text{ mittels } \nu R,\ \dfrac{\nu}{T}=\nu\tau
\end{array}
$$

allein darstellbar ist:

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{aligned}
\nu^2\Big(\frac{1}{\mu P}\Big)^2\Big(\frac{\mu}{\tau}\Big)&=2\Big(\frac{\mu}{\tau}\Big)\Big\{\frac{d}{d\sigma}\Big(\frac{1}{\mu P}\Big)\Big\}^2\\
&+\Big(\frac{1}{\mu P}\Big)\Big(\frac{\mu}{\tau}\Big)\frac{d^2}{d\sigma^2}\Big(\frac{1}{\mu P}\Big)\\
&-\Big(\frac{1}{\mu P}\Big)^2\Big(\frac{\mu}{\tau}\Big)^3-\Big(\frac{1}{\mu P}\Big)^4\Big(\frac{\mu}{\tau}\Big)\\
&+\Big(\frac{1}{\mu P}\Big)\frac{d}{d\sigma}\Big(\frac{1}{\mu P}\Big)\frac{d}{d\sigma}\Big(\frac{\mu}{\tau}\Big),
\end{aligned}
&
\begin{aligned}
\mu^2\Big(\frac{1}{\nu R}\Big)^2\Big(\frac{\nu}{T}\Big)&=2\Big(\frac{\nu}{T}\Big)\Big\{\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{\nu R}\Big)\Big\}^2\\
&+\Big(\frac{1}{\nu R}\Big)\Big(\frac{\nu}{T}\Big)\frac{d^2}{ds^2}\Big(\frac{1}{\nu R}\Big)\\
&-\Big(\frac{1}{\nu R}\Big)^2\Big(\frac{\nu}{T}\Big)^3+\Big(\frac{1}{\nu R}\Big)^4\Big(\frac{\nu}{T}\Big)\\
&+\Big(\frac{1}{\nu R}\Big)\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{\nu R}\Big)\frac{d}{ds}\Big(\frac{\nu}{T}\Big),
\end{aligned}
\end{array}
$$

wenn man die Bedingung

$$
\begin{array}{l|l}
(\mathfrak{Z}\mathfrak{X})_6=0 & (\mathfrak{W}\mathfrak{Y})_6=0
\end{array}
$$

mittels der Formeln (17) berechnet.