

137. Über die Struktur der metabelschen p -Gruppen.

Von Kiyosi TAKETA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Rec. Oct. 12, 1933. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 13, 1933.)

Als Eckstein des Aufbaues der allgemeinen p -Gruppen konstruieren wir hier die metabelschen p -Gruppe. Sei \mathfrak{A} die gegebene Abelsche p -gruppe, und \mathfrak{G} die maximale metabelsche p -Gruppe, die \mathfrak{A} als maximalen Abelschen Normalteiler enthält, ferner sei \mathfrak{A} vom Typus

$$(p^{a_1}, p^{a_1}, \dots n_1\text{-mal}; p^{a_2}, p^{a_2}, \dots n_2\text{-mal}; \dots ; p^{a_k}, p^{a_k}, \dots n_k\text{-mal}), \quad a_1 > a_2 > \dots > a_k.$$

Dann wird die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ 1-isomorph mit einer passenden Kongruenzgruppe Γ , deren Elemente Kongruenzmatrizen von der Gestalt

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad n = \sum_{i=1}^k n_i,$$

nach dem Modul

$$(2) \quad \begin{pmatrix} p^{a_1} & \dots & p^{a_1} & p^{a_2} & \dots & p^{a_2} & \dots & p^{a_k} & \dots & p^{a_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{a_1} & \dots & p^{a_1} & p^{a_2} & \dots & p^{a_2} & \dots & p^{a_k} & \dots & p^{a_k} \\ p^{a_2} & \dots & p^{a_2} & p^{a_2} & \dots & p^{a_2} & \dots & p^{a_k} & \dots & p^{a_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{a_2} & \dots & p^{a_2} & p^{a_2} & \dots & p^{a_2} & \dots & p^{a_k} & \dots & p^{a_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{a_k} & p^{a_k} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & p^{a_k} & \dots & p^{a_k} \end{pmatrix}$$

sind.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass jedes Element von Γ bloss nach dem Modul p betrachtet

$$(3) \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}^{(0)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(0)} & \dots & a_{n,n-1}^{(0)} & 1 \end{pmatrix}$$

wird, dann besteht der folgende Hauptsatz :

Ist A Kongruenzmatrix wie (1) nach dem Modul (2), und wenn bei der zugehörigen Kongruenzmatrix A₀ wie (3) folgende Beziehung besteht :

$$(4) \quad \prod_{i=2}^n a_{i,i-1}^{(0)} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

so sind alle Kongruenzmatrizen B von der Gestalt (1), und von der Primzahlpotenzordnung p^α, die mit A vertauschbar sind, auch miteinander vertauschbar.

Nach diesem Satze und nach der Bedingung

$$(5) \quad AB \equiv BA \pmod{(2)}$$

können wir leicht einsehen, dass die Ordnung von Γ gleich

$$\begin{aligned} & p^{-1} p^{(n_1 + \dots + n_k) \alpha_k} \quad p^{(n_1 + \dots + n_{k-1})(\alpha_{k-1} - \alpha_k)} \dots \quad p^{n_1(\alpha_1 - \alpha_2)} \\ & = p^{(n_1 + \dots + n_k) \alpha_k + (n_1 + \dots + n_{k-1})(\alpha_{k-1} - \alpha_k) \dots + n_1(\alpha_1 - \alpha_2) - 1} \end{aligned}$$

ist, wenn Γ wenigstens ein Element besitzt, für welches die Bedingung (4) erfüllt ist.

Im sonstigen Fall lässt sich die Frage auch auf den obigen Fall zurückführen, und wir erhalten analoges Resultat.

Ferner können wir das Invariantensystem der Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ nach der Bedingung (5) durch die Matrizenkoeffizienten bestimmen.¹⁾

1) In meiner früheren Note „Ueber die auflösbaren linearen Substitutionsgruppen,“ Proc. 7 (1931), soll der Satz 1 zurückgezogen werden.