135. Über eine Eigenschaft der hyperkommutativen Gruppe.

Von Masatada TAZAWA.
Mathematisches Institut, Tohoku Kaiserliche Universität, Sendai.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 13, 1933.)

Eine Gruppe, in der alle Elemente bei Multiplikation kommutativ sind, heisst Abelsche Gruppe. Die Abelsche Gruppe stimmt also mit ihrem Zentrum überein. Von diesem Standpunkt aus können wir den Begriff der Abelschen Gruppe verallgemeinern. Ist $\mathfrak{Z}_1$ das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{Z}_1$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{Z}_1$ mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmt, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ Abelsch. Im sonstigen Falle wollen wir das Zentrum der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ mit $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{Z}_1$ bezeichnen. Wenn $\mathfrak{Z}_2$ mit $\mathfrak{G}$ nicht übereinstimmt, denken wir uns ferner das Zentrum der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_2$. Mit diesem Prozess erhalten wir eine Kette von Normalteilern von $\mathfrak{G}$; nämlich

$$\mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{Z}_n \subset \cdots\cdots,$$

wo $\mathfrak{Z}_n/\mathfrak{Z}_{n-1}$ das Zentrum der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{n-1}$ ist. Diese Kette bricht nach endlichen Gliedern ab. Der letzte Normalteiler in der obigen Kette heisst Hyperzentrum von der Gruppe $\mathfrak{G}$, und eine Gruppe, die mit ihrem Hyperzentrum übereinstimmt, heisst hyperkommutative Gruppe. Also ist die hyperkommutative Gruppe eine Verallgemeinerung der Abelschen Gruppe.

Hat die hyperkommutative Gruppe analoge Eigenschaften mit der Abelschen Gruppe? Eine Abelsche Gruppe von der Ordnung n besitzt bekanntlich einen Normalteiler von der Ordnung d, wo d ein beliebiger Teiler von n ist. Im Folgenden wollen wir beweisen, dass diese Tatsache auch bei der hyperkommutativen Gruppe gilt. Ferner können wir zeigen, dass die Umkehrung auch richtig ist; wenn nämlich eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung n einen Normalteiler von der Ordnung d besitzt, wo d ein beliebiger Teiler von n ist, so ist $\mathfrak{G}$ eine hyperkommutative Gruppe. Also gilt der folgende

Satz. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung n einen Normalteiler mit einem beliebigen Teiler d von n als ihre Ordnung besitze, ist, dass $\mathfrak{G}$ eine hyperkommutative Gruppe ist.

Den ersten Teil dieses Satzes könnte man mit Hilfe des Burnsideschen Satzes beweisen.[1] Hier wollen wir aber den Burnsideschen Satz auf dem Wege des Beweises unsres Satzes herleiten.

Hilfssatz 1. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ irgend zwei Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ Abelsch ist, so ist ebenfalls die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ Abelsch.

Hilfssatz 2. Es genügen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ derselbe Voraussetzung wie bei Hilfssatz 1. Wenn wir die Zentren n-ter Stufe von der Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ bzw. mit $\mathfrak{Z}_n/\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}_n/\mathfrak{B}$ bezeichnen, so ist $\mathfrak{Z}_n \supset \mathfrak{Z}_n'$.

Hilfssatz 3. Es gelte dieselbe Voraussetzung wie bei den Hilfssatze 1 und 2 für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Wenn alsdann $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ hyperkommutativ ist, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ auch hyperkommutativ.

Satz 1. Wenn $\mathfrak{G}$ eine hyperkommutative Gruppe ist, so sind ihre Untergruppe und ihre Faktorgruppe nach einem Normalteiler auch hyperkommutativ.

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{G}$ Abelsch ist, so ist $\mathfrak{H}$ auch Abelsch. Setzen wir voraus, dass Satz 1 für hyperkommutative Gruppen n-ter Stufe (d.h. $\mathfrak{Z}_n = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_{n-1} \neq \mathfrak{G}$) gilt. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ $(n-1)$- stufig hyperkommutativ ist, gilt der Satz für die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$. Wenn wir das Produkt von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{Z}_1$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}_1)$ bezeichnen, dann ist $(\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}_1)/\mathfrak{Z}_1$ hyperkommutativ, da $(\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}_1)/\mathfrak{Z}_1$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ ist. Nach dem Isomorphiesatz ist

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}_1)/\mathfrak{Z}_1 \cong \mathfrak{H}/[\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}_1],$$

wo $[\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}_1]$ der Durchschnitt von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{Z}_1$ ist. Also ist $\mathfrak{H}/[\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}_1]$ hyperkommutativ. Ferner gilt für Zentrum $\mathfrak{Z}_1'$ von der Gruppe $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{Z}' \supset [\mathfrak{H}, \mathfrak{Z}_1].$$

Folglich ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{Z}'$ nach Hilfssatz 3 hyperkommutativ und $\mathfrak{H}$ auch hyperkommutativ.

Zunächst sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{E}$, wo $\mathfrak{E}$ Einheitsgruppe ist. Da $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{E}$ ist, folgt die Hyperkommutativität der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ nach Hilfssatz 3 aus derjenigen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{E}$.

Satz 2. Die hyperkommutative Gruppe ist auflösbar und ihre Hauptreihe stimmt mit ihrer Kompositionsreihe überein.

Beweis. Satz 2 gilt für Gruppen von primzahligen Ordnungen. Setzen wir voraus, dass Satz 2 für Gruppen von niedrigeren Ordnungen als $\mathfrak{G}$ richtig ist. Da $\mathfrak{G}$ hyperkommutativ ist, ist ihr Zentrum $\mathfrak{Z}_1$ nicht gleich der Einheitsgruppe. Nach Induktionsvoraussetzung gilt Satz 2

1) Remak: Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte. Journal für Mathematik, **160** (1900), 34.

W. Burnside: The Theory of Groups of Finite Order, 2. ed., S. 166–167.

für Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ von niedrigerer Ordnung als $\mathfrak{G}$. Ferner ist $\mathfrak{Z}_1$ Abelsch und jeder Normalteiler von $\mathfrak{Z}_1$ zugleich Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Also kann man den Beweis wie bei den p-Gruppen ausführen. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Satz 3. $\mathfrak{G}$ sei eine hyperkommutative Gruppe von der Ordnung $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$. Dann besitzt $\mathfrak{G}$ eine Kompositionsreihe mit jeder Permutation von αp, βq, γr, ..., δs als Kompositionfaktor.

Beweis. Unserer Satz gilt für Gruppen von der primzahrigen Ordnung. Also setzen wir voraus, dass unserer Satz für Gruppen von niedrigeren Ordnung als $\mathfrak{G}$ gilt. Um den Satz zu beweisen ist es genügend zu zeigen, dass $\mathfrak{G}$ Normalteiler von den Ordnungen $p^{\alpha-1}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$, $p^{\alpha}q^{\beta-1}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$, $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma-1}\ldots\ldots s^{\delta}$, $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta-1}$ besitzen. Denn diese Normalteilern sind nach Satz 1 hyperkommutativ und von niedrigeren Ordnung als $\mathfrak{G}$.

Da $\mathfrak{G}$ hyperkommutativ ist, besitzt $\mathfrak{G}$ ein von der Einheitsgruppe verschiedenes Zentrum. Also gibt es in $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler von der primzahligen Ordnung, z.B. einen Normalteiler $\mathfrak{C}$ von der Ordnung p.

Wenn $\alpha \geqq 2$ ist, ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ eine hyperkommutative Gruppe von der Ordnung $p^{\alpha-1}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$. Also gibt es in $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ nach Induktionsvoraussetzung Normalteiler von den Ordnungen $p^{\alpha-2}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$, $p^{\alpha-1}q^{\beta-1}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$, $p^{\alpha-1}q^{\beta}r^{\gamma-1}\ldots\ldots s^{\delta}$, $p^{\alpha-1}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta-1}$. Folglich besitzt $\mathfrak{G}$ Normalteiler von den Ordnungen $p^{\alpha-1}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$, $p^{\alpha-1}q^{\beta-1}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$, ..., $p^{\alpha-1}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta-1}$.

Wenn $\alpha=1$ ist, ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ hyperkommutativ von der Ordnung $q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$. Die Existenz der Normalteilern von den Ordnungen $pq^{\beta-1}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$, $pq^{\beta}r^{\gamma-1}\ldots\ldots s^{\delta}$, ..., $pq^{\beta}\ldots\ldots s^{\delta-1}$ in $\mathfrak{G}$ ist wie im obigen bewiesen. Also müssen wir nur die Existenz des Normalteilers von der Ordnung $q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$ zeigen. Nun bezeichnen wir den Normalteiler von der Ordnung $pq^{\beta-1}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A}$. Wir können annehmen, dass $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}$ ist. Da $\mathfrak{A}$ von niedrigerer Ordnung als $\mathfrak{G}$ ist, so gibt es in $\mathfrak{A}$ einen Normalteiler $\mathfrak{B}$ von der Ordnung $q^{\beta-1}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind Normalteiler von $\mathfrak{A}$ und es ist $[\mathfrak{B},\mathfrak{C}]=\mathfrak{E}$, da die Ordnungen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ teilerfremd sind. Folglich ist das Produkt $(\mathfrak{B},\mathfrak{C})$ direkt. Indem wir die Ordnung von $(\mathfrak{B},\mathfrak{C})=\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}$ beachten, können wir schliessen, dass $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}$ ist. Ferner sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{B}$ such ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ hyperkommutativ von der Ordnung pq ist, so besitzt sie einen Normalteiler von der Ordnung q. Dann gibt es in $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler von der Ordnung $q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$. Damit ist unserer Satz bewiesen.

Satz 4. Die hyperkommutative Gruppe von der Ordnung

$p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$ ist direktes Produkt der Gruppen von den Ordnungen p^{α}, q^{β}, r^{γ}, ..., s^{δ}.

Beweis. Nach Satz 3 besitzt diese hyperkommutative Gruppe eine Kompositionsreihe mit beliebiger Reihenfolge der Primteilern von der Ordnung als Kompositionsfaktor. Also ist unserer Satz richtig nach einem bekannten Satz über auflösbare Gruppen.[1]

Hilfssatz 4. Es sei

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2\times\cdots\cdots\times\mathfrak{A}_m\,.$$

Wenn $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ..., $\mathfrak{B}_m$ bzw. Normalteiler von direkten Faktoren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ..., $\mathfrak{A}_m$ sind, so ist das direkte Produkt $\mathfrak{B}_1\times\mathfrak{B}_2\times\cdots\cdots\times\mathfrak{B}_m$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Satz 5. Die hyperkommutative Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung $n=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$ besitzt einen Normalteiler von der Ordnung d, wo d ein beliebiger Teiler von n ist.

Beweis. $\mathfrak{G}$ ist nach Satz 4 das direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, ..., $\mathfrak{S}$, wo $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, ..., $\mathfrak{S}$ Gruppen von den Ordnungen p^{α}, q^{β}, ..., s^{δ} sind. Es sei $d=p^{\alpha'}q^{\beta}\ldots\ldots s^{\delta}$. Dann besitzen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, ..., $\mathfrak{S}$ bzw. Normalteiler von der Ordnungen $p^{\alpha'}$, $q^{\beta'}$, ..., $s^{\delta'}$. Folglich gibt es in $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 4 einen Normalteiler von der Ordnung $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$.

Hilfssatz 5. Es sei $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2\times\cdots\cdots\times\mathfrak{A}_m$. Dann ist das Hyperzentrum von $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt der Hyperzentren von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ..., $\mathfrak{A}_m$. Wenn also $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ..., $\mathfrak{A}_m$ hyperkommutativ sind, dann ist $\mathfrak{G}$ auch hyperkommutativ.

Satz 6. (Umkehrung des Satzes 5). Die Gruppen von der Ordnung $n=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots\ldots s^{\delta}$ sind hyperkommutativ, wenn sie einen Normalteiler besitzen, welcher einen beliebigen Teiler d von n als ihre Ordnung besitzt.

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ mit einer beliebigen Reihenfolge der Primteilern von n als Kompositionsfaktor. Also ist $\mathfrak{G}$ direktes Produkt der endlichen p-Gruppen. Da die p-Gruppe hyperkommutativ ist, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ hyperkommutativ. Somit ist unserer Satz bewiesen.

---

1) W. Burnside: The Theory of Groups of Finite Order, 2. ed. S. 74–75.