PAPERS COMMUNICATED

132. Zwei Bemerkungen über schlichte Funktionen.

Von Shin-ichi TAKAHASHI.
Math. Inst., Kaiserliche Universität zu Osaka u. Shiomi-Institut.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 13, 1933.)

1. Das Koeffizientenproblem.

Herr Calugaréano hat kürzlich die explizite Auflösung des Koeffizientenproblems von schlichten Potenzreihen angestellt.[1] Sein Beweis stützt sich auf den Kampé de Férietschen Satz über Logarithmus von Funktionen. Im folgenden möchte ich aber zeigen, dass ganz einfache Methode zum Ziele führt. Dabei spielt der folgende fundamentale Satz eine wichtige Rolle.

Die Funktion $f(z)$, regulär und analytisch im Kreise $|z|<R$, ist dann und nur dann schlicht, wenn sich die Funktionenfolge

$$\phi_\nu(z)=\frac{(e^{i\nu}-1)z}{f(e^{i\nu}z)-f(z)}\,, \qquad \nu=0,1,2,\ldots\ldots$$

daselbst regulär verhält.

Es sei nun

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots, \qquad |z|<R.$$

Dann ist

$$\frac{f(e^{i\nu}z)-f(z)}{(e^{i\nu}-1)z}=1+a_2\frac{\sin 2\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\nu}{2}}\xi+\cdots\cdots+a_n\frac{\sin n\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\nu}{2}}\xi^{n-1}+\cdots\cdots,$$

$$\xi=e^{i\frac{\nu}{2}}z$$

so dass

$$\phi_\nu(z)=\frac{(e^{i\nu}-1)z}{f(e^{i\nu}z)-f(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(\nu)}\xi^{n-1},$$

wobei

$$c_n^{(\nu)}=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_2^{(\nu)} & a_3^{(\nu)} & a_4^{(\nu)} & \cdots\cdots & a_n^{(\nu)} \\ 1 & a_2^{(\nu)} & a_3^{(\nu)} & \cdots\cdots & a_{n-1}^{(\nu)} \\ & 1 & a_2^{(\nu)} & \cdots\cdots & a_{n-2}^{(\nu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & a_2^{(\nu)} \end{vmatrix},$$

1) Mathematica (Cluj), **6** (1932), 75–79.

$$c_1^{(\nu)}=1\,,\qquad a_n^{(\nu)}=a_n\frac{\sin n\dfrac{\nu}{2}}{\sin\dfrac{\nu}{2}}\,,\qquad \nu=0,\,1,\,2,\,\ldots\ldots$$

gesetzt sind.

Man bezeichne mit ρ_ν den Konvergenzradius von $\sum c_n^{(\nu)}\xi^{n-1}$. Wegen des fundamentalen Satzes kann man den Schlichtheitsradius R von $f(z)$ folgendermassen schreiben:

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{R}=\operatorname*{Max}_{\nu=0,1,2,\ldots\ldots}\left[\frac{1}{\rho_\nu}\right]=\operatorname*{Max}_{\nu=0,1,2,\ldots\ldots}\left[\overline{\lim_{n=\infty}}\sqrt[n-1]{|c_n^{(\nu)}|}\right].$$

Also ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Potenzreihe

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$$

den Kreisbereich $|z|<1$ auf den schlichten Bereich abbildet, in der folgenden Form darstellbar:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\sqrt[n-1]{|c_n^{(\nu)}|}\leqq 1\,,\qquad \nu=0,\,1,\,2,\,\ldots\ldots$$

Es ist leicht zu sehen, dass man in der Ungleichung (1) das Zeichen Max und $\overline{\lim}$ vertauschen kann.

Also ist

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n=\infty}}\sqrt[n-1]{\operatorname*{Max}_{0\leq\nu\leq 2\pi}|c_n^{(\nu)}|}\,.$$

2. *Die Koeffizientenabschätzung.*

Es sei

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots,\qquad |z|<1$$

eine reguläre und schlichte Funktion. Bekanntlich gilt dann nach Landau die Koeffizientenabschätzung:

$$|a_n|<\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)en\,.$$

Also ist offenbar

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{|a_n|}{n}<\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)e=2,\,22\ldots\ldots$$

In dieser Limesbeziehung besteht aber noch etwas verschärrere Ungleichung

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{|a_n|}{n}\leqq 2;$$

mit anderen Worten, für jedes positives ε gibt es eine Zahl $N(\varepsilon)$, so dass

$$|a_n|<(2+\varepsilon)n \qquad \text{für} \qquad n>N(\varepsilon).$$

Zum Beweise setze man

$$\varphi(z)=\sqrt{f(z^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}z^{2n-1} \qquad b_1=1;\ |z|<1;$$

dann ist $\varphi(z)$ regulär, ungerade und schlicht.

Für $|z|\leqq r$ ist bekanntlich

$$|\varphi(z)|\leqq\frac{r}{1-r^2}, \qquad 0<r<1.$$

Wegen der Schlichtheit ist der Inhalt

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|b_{2n-1}|^2r^{2(2n-1)}$$

des φ-Bildes von $|z|\leqq r$ höchstens

$$\pi\operatorname*{Max}_{|z|\leqq r}{}^2|\varphi(z)|\leqq\frac{\pi r^2}{(1-r^2)^2}.$$

Daher ist für $0\leqq r<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|b_{2n-1}|^2r^{2(2n-1)}\leqq\frac{r^2}{(1-r^2)^2},$$

d. h.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|b_{2n-1}|^2t^{2n-2}\leqq\frac{1}{(1-t)^2}, \qquad 0\leqq t<1.$$

Für $0<r<1$ ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_{2n-1}|^2r^{2n-1}\leqq\int_0^r\frac{dt}{(1-t)^2}=\frac{r}{1-r}.$$

Daraus folgt nach der Hardy-Littlewoodschen Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes die Ungleichung

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{|b_1|^2+|b_3|^2+\cdots\cdots+|b_{2n-1}|^2}{2n}\leqq 1.$$

Aus

$$f(z^2)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}z^{2n-1}\Big)^2$$

folgt aber

$$a_n=b_1b_{2n-1}+b_3b_{2n-3}+\cdots\cdots+b_{2n-1}b_1,$$

und also

$$|a_n| \leqq |b_1|^2 + |b_3|^2 + \cdots\cdots + |b_{2n-1}|^2 .$$

Somit ist die Behauptung bewiesen, denn

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{|a_n|}{2n} \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{|b_1|^2 + |b_3|^2 + \cdots\cdots + |b_{2n-1}|^2}{2n} \leqq 1 .$$