161. *Eine Bemerkung über den Normensatz relativ-Galoisscher Zahlkörper.*

Von Tadao TANNAKA.

Mathematisches Institut, Tohoku Kaiserliche Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1933.)

Der Normensatz im zyklischen Körper[1] wurde neuerdings durch Brauer, Hasse und Noether[2] in äusserst schöner Formulierung folgendermassen verallgemeinert:

Jede überall zerfallende Algebra zerfällt schlechthin.

Ich möchte hier eine kleine Bemerkung über diesen Satz machen. Der Einfachheit halber sei die folgende Ausdrucksweise gestattet: Es sei K/k ein Galoisscher Körper, $\mathfrak{P}$ ein Primideal in K und $a_{S,T}$ ein Faktorensystem von K/k mit der Bedingung

$$a_{S_0,T_0} \equiv \frac{c_{S_0}^{T_0} c_{T_0}}{c_{S_0 T_0}} \text{ mod. } \mathfrak{P}^\rho ,$$

wobei S_0, T_0, ... alle Galoissubstitutionen der Zerlegungsgruppe für $\mathfrak{P}$ durchlaufen, dann heissen wir „$a_{S,T}$ zerfällt mod. $\mathfrak{P}^\rho$“, im Zeichen

$$(a_{S,T}) \sim (1) \text{ mod. } \mathfrak{P}^\rho .$$

Dann gilt:

Satz 1. Es gibt ein (endliches) Ideal $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(K/k)$ in K derart, dass aus $(a_{S,T}) \sim (1)$ mod. $\mathfrak{U}(\mathfrak{P})$ für jedes $\mathfrak{P}$, folgt schlechthin $(a_{S,T}) \sim (1)$.

Dies folgt aus den folgenden Sätzen 2 und 3 bei der Verknüpfung mit dem am Anfang genannten Normensatz.

Satz 2. Es sei $K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ relativ-Galoisscher Henselscher Körper mit der Gruppe $G=S+T+U+\cdots\cdots$, dann gibt es eine Potenz $\mathfrak{P}^\rho$ derart, dass aus

$$(a_{S,T}) \sim (1) \text{ mod. } \mathfrak{P}^\rho$$

folgt schlechthin

$$(a_{S,T}) \sim (1) .$$

Die kleinste Potenz $\mathfrak{P}^\rho$ mit dieser Eigenschaft sei mit $\mathfrak{U}(\mathfrak{P})=\mathfrak{U}(K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$ bezeichnet.

Satz 3. Für zyklischen Körper $K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ stimmt $\mathfrak{U}(K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$ mit dem Führer $\mathfrak{f}(K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$ überein.

---

1) H. Hasse: Beweis eines Satzes und Wiederlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol. Göttinger Nachr. (1931).

2) R. Brauer, H. Hasse, E. Noether: Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. Crelles Journal, **167** (1932).

Satz 3 ist fast trivial. Aus diesem folgt insbesondere, dass $\mathfrak{U}(K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})=1$ für unverzweigten Körper $K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$, da solcher Körper bekanntlich zyklisch ist, also folgt auch die Endlichkeit der verschiedenen in $\mathfrak{U}(K/k)=\Pi\mathfrak{U}(\mathfrak{P})$ auftretenden Primideale.

Beweis des Satzes 2:

Es sei $n_{\mathfrak{p}}=[K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}]$ und ρ' eine genügend grosse natürliche Zahl, so dass für jedes überhaupt in $K^{\mathfrak{p}}$ existierende von 1 verschiedene $n_{\mathfrak{p}}$-te Einheitswurzel ζ

$$\text{(A)} \qquad \zeta \not\equiv 1 \text{ mod. } \mathfrak{P}^{\rho'}$$

gilt. Man wähle dann ρ so gross, dass jedes a mit

$$a \equiv 1 \text{ mod. } \mathfrak{P}^{\rho}$$

eine g-te Potenz b^g wird, wobei $g=\varphi(\mathfrak{P}^{\rho'})n_{\mathfrak{p}}$ gesetzt ist.[1] Dann ist

$$a=(b^{\varphi(\mathfrak{P}^{\rho'})})^{n_{\mathfrak{p}}}=c^{n_{\mathfrak{p}}},$$

$$c \equiv 1 \text{ mod. } \mathfrak{P}^{\rho'}.$$

Ein Faktorensystem $a_{S,T}$ genüge der Relation

$$a_{S,T} \equiv 1 \text{ mod. } \mathfrak{P}^{\rho},$$

so ist nach dem obigen

$$a_{S,T}=b_{S,T}^{n_{\mathfrak{p}}}, \quad b_{S,T} \equiv 1 \text{ mod. } \mathfrak{P}^{\rho},$$

also

$$b_{S,T}^{U n_{\mathfrak{p}}}=\frac{b_{T,U}^{n_{\mathfrak{p}}} b_{S,TU}^{n_{\mathfrak{p}}}}{b_{ST,U}^{n_{\mathfrak{p}}}}.$$

Dies ergibt nach der Bedingung (A)

$$b_{S,T}^{U}=\frac{b_{T,U} b_{S,TU}}{b_{ST,U}},$$

d.i. $b_{S,T}$ selbst bildet ein Faktorensystem. Daher ist

$$(a_{S,T}) \sim (b_{S,T})^{n_{\mathfrak{p}}} \sim (1),$$

wie behauptet.

Den genauen Wert von $\mathfrak{U}(K/k)$ zu bestimmen scheint mir von nicht geringem Interesse, es wäre aber vielleicht eine schwierige Aufgabe. Ich begnüge mich daher nur mit den folgenden rohen Resultaten.

Satz 4. Es sei wieder $K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ Galoissch und $K_0^{\mathfrak{p}}$ ein Galoisscher Zwischenkörper desselben, dann ist

$$\mathfrak{U}(K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}) \geqq \mathfrak{U}(K_0^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}).$$

1) Dies ist in der Tat möglich. Vergleiche z.B. H. Hasse: Klassenkörpertheorie (Manuskript), Satz 121.

Beweis: Es sei g zu $K_0^{\mathfrak{p}}$ gehörige Untergruppe der Galoisschen Gruppe G von $K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$, $G_0=G/g$ die Gruppe von $K_0^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$, und a_{S_0, T_0} ein Faktorensystem von $K_0^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ mit $a_{S_0, T_0}\equiv 1 \bmod. \mathfrak{U}(K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$.

Nach Brauer gilt[1)]

$$(a_{S_0, T_0}, G_0) \sim (a_{S, T}, G),$$

wenn für alle Elemente σ, τ von g

$$a_{S, T} = a_{S_0\sigma, T_0\tau} = a_{S_0, T_0}$$

gesetzt. Aus der Kongruenzen

$$a_{S, T} \equiv 1 \bmod. \mathfrak{U}(K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$$

folgt nach der Definition $(a_{S, T}) \sim (1)$, also $(a_{S_0, T_0}, G_0) \sim (1)$, was unsere Behauptung ergibt.

Satz 5. Wenn $K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ ein Abelscher Körper ist, dann ist $\mathfrak{U}(K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$ durch $\mathfrak{f}(K^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$ teilbar.

Beweis: Dies folgt aus den Sätzen 3 und 4.

Satz 6. Wenn die Grade $n_{\mathfrak{p}}^0=[K_0^{\mathfrak{p}}:k_{\mathfrak{p}}]$ und $n_{\mathfrak{p}}'=[K'^{\mathfrak{p}}:k_{\mathfrak{p}}]$ relativ prim sind, so ist $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(K_0^{\mathfrak{p}}K'^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})=\text{Max.}\,\{\mathfrak{U}(K_0^{\mathfrak{p}}/k^{\mathfrak{p}}), \mathfrak{U}(K'^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})\}=\mathfrak{U}^*$.

Beweis: Nach Satz 4 ist es nur zu beweisen, dass $\mathfrak{U}\leqq\mathfrak{U}^*$ ist. Die zu $K_0^{\mathfrak{p}}$ und $K'^{\mathfrak{p}}$ gehörigen Gruppen seien bzw. $G_0=S_0+T_0+\cdots\cdots$ und $G'=S'+T'+\cdots\cdots$. Es sei ferner $a_{S, T}$ ein Faktorensystem von $K_0^{\mathfrak{p}}K'^{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ mit $a_{S, T}\equiv 1(\mathfrak{U}^*)$ und

$$b_{S', T'} \quad N_{K_0^{\mathfrak{p}}K'^{\mathfrak{p}}/K_0^{\mathfrak{p}}}(a_{S', T'}),$$

$$c_{S_0, T_0} = N_{K_0^{\mathfrak{p}}K'^{\mathfrak{p}}/K'^{\mathfrak{p}}}(a_{S_0, T_0}),$$

dann ist offenbar $b_{S', T'}\equiv c_{S_0, T_0}\equiv 1(\mathfrak{U}^*)$. Wenn man beachtet, dass nach einem Satz von Chevalley[2)] die Relationen

$$(a_{S, T}, G)^{n_{\mathfrak{p}}^0} \sim (b_{S', T'}, G'),$$

$$(a_{S, T}, G)^{n'_{\mathfrak{p}}} \sim (c_{S_0, T_0}, G_0)$$

gelten, so folgt ohne weiteres $(a_{S, T}, G) \sim k_{\mathfrak{p}}$, w.z.b.w.

---

1) Vgl. z.B. K. Shoda: Bemerkungen über die Faktorensysteme einfacher hyperkomplexer Systeme. Japanese Journal of Math., **10** (1933).

2) C. Chevalley: La théorie du symbole de restes normiques. Crelles Journal, **169** (1933), Hifssatz 5.