160. *Einige Bemerkungen über schlichte Funktionen.*

Von Kenzo JOH.
Technische Fakultät, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1933.)

In der vorliegenden Note betrachte ich die Klasse von analytischen Funktionen

(1) $$w=f(z)=z+\cdots\cdots,$$

die in $|z|<1$ regulär bzw. meromorph und schlicht sind.

Neuerdings hat Herr Strohhäcker[1] den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $w=f(z)=z+\cdots\cdots$ regulär und schlicht konvex in $|z|<1$. Von zwei Randpunkten des Bildgebietes G von $|z|<1$, die auf derselben Nullgeraden, aber auf verschiedenen Seiten des Nullpunktes liegen, ist mindestens einer vom Nullpunkt um mindestens $\frac{\pi}{4}$ entfernt.

Erstens geben wir einen ganz einfachen Beweis für diesen Satz. Dabei modifizieren wir den genannten Satz in der folgenden verallgemeinerten Form:

Es sei $w=f(z)=z+\cdots\cdots$ regulär und schlicht konvex in $|z|<1$. C_1, C_2 seien zwei Randpunkte des Bildgebietes G von $|z|<1$, die auf derselben Nullgeraden, aber auf verschiedenen Seiten des Nullpunktes liegen, so ist der Abstand der zwei Randpunkte C_1, C_2 nicht kleiner als $\frac{\pi}{2}$.

Zum Beweise benutzen wir das Pôlyasche Verfahren[2] für den transfiniten Durchmesser[3] von der abgeschlossenen beschränkten Punktmenge, deren komplementäre Punktmenge (die enthält den unendlichen Punkt) einfach zusammenhängend ist.

Nun sei G der Bereich auf der w-Ebene (der enthält den Punkt $w=0$) abgebildet von einer beliebigen Funktion $w=f(z)$ der Klasse (1) in $|z|<1$ und A die komplementäre abgeschlossene Punktmenge von G auf der w-Ebene. Mittels der reziproken Transformation $\zeta=\frac{1}{w}$ geht

---

1) Math. Zeits., **37** (1933), 356–380.

2) Math. Ann., **99** (1928), 687–706. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., (1928), 228–232, 280–282; (1929), 55–62.

3) M. Fekete: Math. Zeits., **17** (1923), 228–249; a.a.o. 2).

G in $\mathfrak{G}$ über (der enthält $\zeta=\infty$) und A in die abgeschlossene beschränkte Punktmenge $\mathfrak{A}$ auf der ζ-Ebene über.

Die Funktion $z=\dfrac{1}{f^{-1}(\zeta^{-1})}$, wo f^{-1} die reziproke Funktion von f bezeichnet, ist schlicht in $\mathfrak{G}$ und führt $\mathfrak{G}$ in das Äussere des Einheitskreises auf der z-Ebene über, den Punkt $\zeta=\infty$ und dessen Linienelement festhaltend.

So ist der transfinite Durchmesser von $\mathfrak{A}$ immer gleich 1.

Beweis. Es genügt, unser Satz für die Abbildungen auf Winkelräume bzw. Parallelstreifen zu beweisen. Es sei C_1OC_2 eine beliebige Nullgerade, C_1 und C_2 die Randpunkte von G auf ihr. Wir zeichnen in C_1 und C_2 die Stützgeraden von G, die eine Winkelraum oder Parallelstreifen G_1 einschliessen, welche G im Innern enthält. Die Funktion $w=g(z)=r\cdot z+\cdots\cdots$, wo $r>0$, bilde $|z|<1$ auf G_1 ab. Es ist leicht zu sehen, dass $r\geqq 1$ ist. Die Funktion $w=h(z)=\dfrac{1}{r}g(z)=z+\cdots\cdots$ bildet $|z|<1$ auf ein Gebiet G_2 ab, das aus G_1 durch Streckung entsteht. Schneidet man die Randstrahlen von G_2 mit C_1C_2 in A_1 und A_2, so ist $|A_k|\leqq|C_k|$ $(k=1, 2)$, d.h. der Satz ist bewiesen, wenn es gezeigt wird, dass die Ungleichung $|A_1|+|A_2|\geqq\dfrac{\pi}{2}$ besteht.

Die Stützgeraden in C_1 und C_2 seien nicht parallel. S sei der Scheitelpunkt von G_2 und A_2 die komplementäre abgeschlossene Punktmenge von G_2. Wir bilden den G_2 und A_2 über die ζ-Ebene durch die reziproke Transformation $\zeta=\dfrac{1}{w}$ ab. So geht A_2 in eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge $\mathfrak{A}_2$ über, begrenzt von zwei Kreisbögen K_1 und K_2, welche die Bilde von Gerade SA_1 und SA_2 sind und an der Punkt $O'(\zeta=0)$ und S', der das Bild von S ist, schneiden. Hierfür geht die Gerade A_1OA_2 in eine Gerade $A_1'O'A_2'$ über, wobei A_1' bzw. A_2' das Bild von A_1 bzw. A_2 ist. Sei $B_1O'B_2$ eine Gerade senkrecht zur Gerade $S'O'$, wo B_1 bzw. B_2 auf K_1 bzw. K_2 liegt, so haben wir nur zu zeigen dass

$$|B_1|+|B_2|\leqq\frac{8}{\pi}, \tag{2}$$

weil dann
$$|A_1'|+|A_2'|\leqq|B_1|+|B_2|\leqq\frac{8}{\pi},$$

d.h.
$$\frac{1}{|A_1|}+\frac{1}{|A_2|}\leqq\frac{8}{\pi},$$

und also $$|A_1| \geqq \frac{\pi|A_2|}{8|A_2|-\pi}.$$

Folglich ist hier

$$|A_1|+|A_2| \geqq \frac{\pi|A_2|}{8|A_2|-\pi}+|A_2|=\frac{8|A_2|^2}{8|A_2|-\pi} \geqq \frac{\pi}{2}.$$

Nun ist der transfinite Durchmesser τ von $\mathfrak{A}_2$ begrenzt von zwei Kreisbögen K_1, K_2 gleich 1 und

$$\tau=|S'|\frac{1}{2\frac{\theta_1+\theta_2}{\pi}\sin\left(\frac{\theta_1\pi}{\theta_1+\theta_2}\right)}=1^{1)}, \tag{3}$$

wo $\theta_1=\widehat{S'B_1O'}$, $\theta_2=\widehat{S'B_2O'}$ setzt.

Andererseits haben wir unmittelbar

$$|B_1|+|B_2|=|S'|(\operatorname{cotg}\theta_1+\operatorname{cotg}\theta_2),$$

so dass man aus (3) die Gleichung

$$|B_1|+|B_2|=2\frac{\theta_1+\theta_2}{\pi}\sin\left(\frac{\theta_1\pi}{\theta_1+\theta_2}\right)\left\{\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}+\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\right\}$$

erhält. Setzt man $\theta_1=k\theta_2$ $(k>0)$, $\theta_2=\theta$,

dann ist $$|B_1|+|B_2|=2\frac{(1+k)}{\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{1+k}\right)\theta\left\{\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right\},$$

und $$\theta\left\{\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right\}=\frac{1}{k}(k\theta)\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}+\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\leqq\frac{1}{k}+1,$$

unter Beachtung von der Ungleichung $\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\leqq 1$.

So ist $$|B_1|+|B_2|\leqq\frac{2}{\pi}\frac{(1+k)^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{1+k}\right).$$

Die Funktion von k: $\frac{(1+k)^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{1+k}\right)$ erreicht ihre Maximum 4 für $k=1$, und daraus folgt die Ungleichung (2):

$$|B_1|+|B_2|\leqq\frac{8}{\pi}.$$

Die Stützgeraden in C_1 und C_2 seien parallel. Dieser Fall ist der Grenzfall des oben betrachteten Fall. Unsere Behauptung ist offenbar richtig in diesem Fall.

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

---

1) Vgl. z.B. G. Pólya u. G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. **2**, 19 und 192.

In folgenden Linien möchte ich einige Bemerkungen über Funktionen der Klasse (1) hinzufügen.

Zwei Punkte a und b in der ζ-Ebene seien gegeben. Wohlbekannt ist die Tatsache dass unter allen beschränkten und abgeschlossenen Punktmengen, die ein einfach zusammenhängende Komplementärgebiet haben und die beiden gegebenen Punkte a und b enthalten, die Verbindungsstrecke von a und b den kleinste transfiniten Durchmesser $\frac{1}{4}|b-a|$ besitzt.

Wenn wir konstruieren alsdann die abgeschlossene beschränkte Punktmenge $\mathfrak{A}$ auf der ζ-Ebene für jede Funktion der Klasse (1), so haben wir die Ungleichung $|b-a| \leqq 4$, wobei a, b zwei Punkte von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Wie bekannt, ist 4 hier die beste Konstante.

Nach dieser Behauptung folgen die Sätze von Montel-Bieberbach und Marty[1] ganz unmittelbar ohne Benutzung des Viertelsatzes von der schlichten regulären Funktionen, und wir können auch den folgenden verallgemeinerten Szegöschen Satz beweisen:

Es sei $w=f(z)=z+\cdots\cdots$ regulär und schlicht in $|z|<1$, und C_1, C_2 seien zwei Randpunkte des Bildgebietes G von $|z|<1$, die auf derselben Nullgeraden, aber auf verschiedenen Seiten des Nullpunktes liegen, so ist der Abstand der zwei Randpunkte C_1 und C_2 nicht kleiner als 1.

Die Schranke ist scharf und wird von der Funktion $w=f(z)=\dfrac{z}{1-z^2}$ erreicht.

Zum Schlusse möchte ich Herrn S. Takahashi für seine Anregungen meinen herzlichen Dank aussprechen.

1) Vgl. Montel: Leçon sur les fonctions univalentes ou multivalentes, (1933), 59–62.