17. Über einige Eigenschaften der polaren Kongruenzen, I.

Von Yasuo MÔRI.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Feb. 12, 1934.)

Es sei F eine Fläche des gewöhnlichen projektiven Raumes R_3.

Jedem allgemeinen Flächenpunkte P entspricht ein Büschel der Quadriken von Darboux, welche sämtlich die Berührung zweiter Ordnung mit F in P besitzen. Im Büschel von Darboux ist bekanntlich die Quadrik von Lie dadurch gekennzeichnet, dass sie drei Tangenten an die Asymptotenlinien des anderen Systems durch drei unendlich benachbarte Punkte einer Asymptotenlinie als Erzeugenden enthälten.

In den folgenden Zeilen geben wir eine andere geometrische Festlegung der Lie-Quadrik im Büschel von Darboux.

Es seien $x_i(u, v)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ die homogenen Koordinaten des Flächenpunktes P_x und sollen u-Linien und v-Linien, wie wir annehmen wollen, die krummen Asymptotenlinien von F sein. Dann genügen $x_i(u, v)$ einem integrierbaren System von Differentialgleichungen, die man auf die folgende Fubini'sche kanonische Form bringen kann:[1)]

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_{uu} &= p_{11}x + \theta_u x_u + \beta x_v , \\ x_{vv} &= p_{22}x + \gamma x_u + \theta_v x_v . \qquad (\theta = ln\beta\gamma) \end{aligned}$$

Wir beziehen einen beliebigen Punkt Q des Raumes auf das lokale Tetraheder $xx_ux_vx_{uv}$, und bezeichnen seine lokalen Koordinaten mit x_1, x_2, x_3, x_4.

Man betrachte jetzt eine beliebige Kongruenz H_1, deren Erzeugende die Verbindungsgerade $l_1(x, y)$ der Punkte x und y ist:

$$(2) \qquad y = -ax_u - bx_v + x_{uv}$$

Hierbei bedeuten die Koeffizienten a, b die skalaren Funktionen von u und v.

Es sei H_2 die polare Kongreuenz von H_1 bezüglich irgend einer Quadrik von Darboux. Die erzeugende Gerade l_2 von H_2 ist:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 + bx_2 + ax_3 &= 0 , \\ x_4 &= 0 . \end{aligned}$$

---

1) G. Fubini: Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie, Atti di Torino, **53**, 1918, p. 1033.

Wir betrachten nun den harmonisch konjugierten Punkt S von x bezüglich zweier Brennpunkte auf der Geraden l_1, und in dualer Weise die harmonisch konjugierte Ebene $\sum$ der Tangentenebene in P bezüglich zweier Brennebenen von H_2 im Ebenenbüschel, dessen Achse die Gerade l_2 ist. Einfachheitshalber wollen wir S und $\sum$ bzw. den Koenigs'schen Punkt und die Koenigs'sche Ebene der polaren Kongruenzen (H_1, H_2) nennen.[1]

Nach einfachen Rechnungen nehmen die Koordinaten z des Koenigs'schen Punktes S und die Gleichung der Koenigs'schen Ebene $\sum$ bzw. die folgenden Gestalten:[2]

$$z=y+\lambda x\,, \qquad \lambda=-\tfrac{1}{2}(A+B) \tag{4}$$

$$x_1+bx_2+ax_3+[ab+\tfrac{1}{2}(a_u+b_v]x_4=0 \tag{5}$$

wobei gesetzt wird:

$$\begin{aligned} A&=-a_u-ab+\beta\gamma+\theta_{uv}\,,\\ B&=-b_v-ab+\beta\gamma+\theta_{uv}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Satz. *Die Lie-Quadrik hat im Büschel von Darboux die kennzeichnende Eigenschaft, dass der Koenigs'sche Punkt beliebiger polaren Kongruenzen (H_1, H_2) der Pol der Koenigs'schen Ebene dieser Kongruenzen bezüglich dieser Quadrik ist.*[3]

Beweis. Die lokaren Koordinaten des Koenigs'schen Punktes S sind nach (4):

$$z_1=\lambda\,, \quad z_2=-a\,, \quad z_3=-b\,, \quad z_4=1\,.$$

Die Polarebene des Koenigs'schen Punktes bezüglich irgend einer Quadrik im Büschel von Darboux

---

1) Wenn x ein konjugiertes Netz (mit gleichen Invarianten) beschreibt, so beschreibt auch der Punkt z ein solches Netz, und das erstere geht in das letztere durch die Koenigs'sche Transformation über. (Vgl. G. Tzitzéica: Géométrie différentielle projective des réseaux, 1923, p. 79).

In diesem besonderen Fall wurden solcher Punkt und Ebene schon von Green und Slotnick betrachtet. (Vgl. M. M. Slotnick: On the projective differential geometry of conjugate nets. Am. J., Bd. **53**, 1931, p. 143).

2) In meiner demnächst erscheinenden Arbeit über polare Kongruenzen will ich diese Rechnungen durchführen.

3) Setzt man (ξ=Ebenenkoordinaten der Tangentenebene)

$$x'=x_1x+x_2x_u+x_3x_v+x_4x_{uv}$$
$$\xi'=\xi_1\xi+\xi_2\xi_u+\xi_3\xi_v+\xi_4\xi_{uv}\,,$$

so bestimmt die Korrelation $\xi'_i=x_i$ die Čech'sche fundamentare Polarität bezüglich der Lie-Quadrik auf F. Unser Satz ist ein geometrisches Beispiel dieser Tatsache. (Vgl. G. Fubini e E. Čech: Geometria proiettiva differenziale, Vol. I, p. 128).

(7) $$2(x_2x_3-x_1x_4)-hx_4^2=0\,, \qquad (h: \text{ein Parameter})$$

ist demnach:

$$x_1+bx_2+ax_3+(h+\lambda)x_4=0\,,$$

oder nach (4) und (6):

(8) $$x_1+bx_2+ax_3+[h+\tfrac{1}{2}(a_u+b_v)+ab-(\beta\gamma+\theta_{uv})]x_4=0\,.$$

Dafür, dass diese Gleichung mit der Koenigs'schen Ebene (5) übereinstimmen soll, ist es notwendig und hinreichend, dass

(9) $$h=\beta\gamma+\theta_{uv}$$

ist.

Dann stellt (7) die Lie-Quadrik dar, womit der Satz bewiesen ist.